

DESCRIPCIÓN DE FUNCIONES**1.1.3 – 1.2.2**

Además de introducir a los alumnos a las normas de clase relativas al aprendizaje basado en los problemas, el objetivo principal de estas lecciones consiste en que los alumnos puedan describir totalmente los elementos esenciales del gráfico de una función. Para describir el gráfico de una función en su totalidad, los alumnos deben responder las siguientes preguntas para investigación de gráficos:

Pregunta para investigación de gráficos	Ejemplo de enunciado sintético
¿Cómo describirías el gráfico?	<i>El gráfico parece una media parábola de costado.</i>
¿El gráfico va en aumento o en disminución (viéndolo de izquierda a derecha)?	<i>A medida que x aumenta, y aumenta.</i>
¿Cuáles son los puntos de corte con el eje x y el eje y ?	<i>Los puntos de corte del gráfico con los ejes x e y están en $(0, 0)$.</i>
¿Existen limitaciones respecto de los valores de entrada (dominio) de la ecuación?	<i>Solo son posibles valores positivos de x y cero.</i>
¿Existen limitaciones respecto de los valores de salida (rango) de la ecuación? (¿Existe un valor máximo o mínimo de y ?)	<i>El valor más pequeño de y es 0. No hay un valor máximo de y.</i>
¿Existe algún punto especial?	<i>El gráfico tiene un punto “inicial” en $(0, 0)$.</i>
¿El gráfico tiene alguna simetría? De ser así, ¿dónde está?	<i>Este gráfico no presenta simetrías.</i>

Los conceptos más formales de función, dominio, y rango se abordan en las Lecciones 1.2.4 y 1.2.5.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 1.1.1, 1.1.2, y 1.1.3. Las respuestas de los alumnos al Registro de aprendizaje de la Lección 1.1.1 (problema 1-32), si les fue asignado, también pueden ser de utilidad.

Ejemplo 1

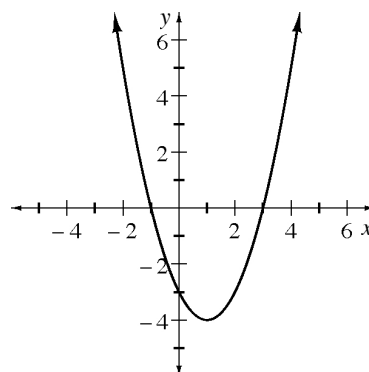
Para la función $y = x^2 - 2x - 3$, realiza una tabla $x \rightarrow y$, dibuja un gráfico, y describe completamente sus características.

En este punto no hay forma de saber cuántos puntos son suficientes para la tabla $x \rightarrow y$. Agrega más puntos según sea necesario y hasta que estés seguro de la forma y ubicación.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0

Ten cuidado con la sustitución y el Orden de las operaciones al calcular los valores. Por ejemplo, si $x = -2$,
 $y = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$.

El gráfico es una parábola abierta arriba. Los puntos de corte con el eje x son $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. El punto de corte con el eje y es $(0, -3)$. De izquierda a derecha, el gráfico disminuye hasta $x = 1$ y luego aumenta. El punto mínimo (más bajo) del gráfico (denominado vértice) es $(1, -4)$. La línea recta vertical $x = 1$ es una línea de simetría. No hay limitaciones respecto de los valores de entrada de la función. Los valores de salida pueden ser valores mayores o iguales a -4 .



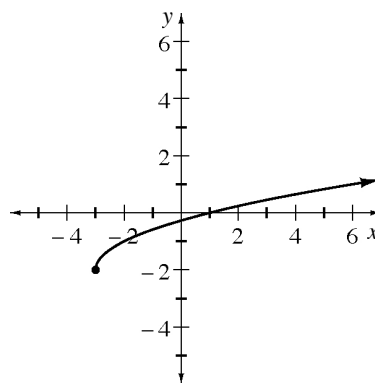
Ejemplo 2

Para la función $y = \sqrt{x+3} - 2$, realiza una tabla $x \rightarrow y$, dibuja un gráfico, y describe sus características.

Observa que el número más pequeño posible para la tabla $x \rightarrow y$ es $x = -3$. Cualquier otro valor más pequeño requerirá la raíz cuadrada de un negativo, que no es un número real.

x	-4	-3	0	1	3	6
y		-2	-0.3	0	0.4	1

El gráfico representa la mitad de una parábola. Comienza en $(-3, -2)$, el punto de corte con el eje x es $(1, 0)$, y el punto de corte con el eje y es $(0, \approx -0.3)$. El gráfico aumenta de izquierda a derecha. Los valores de entrada se limitan a -3 o valores mayores, y los valores de salida se limitan a -2 o valores mayores. No hay una línea de simetría.



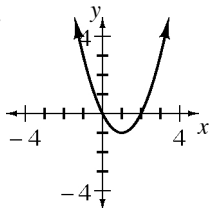
Problemas

Para cada función, realiza una tabla $x \rightarrow y$, dibuja un gráfico, y describe sus características.

- | | | |
|------------------------|-----------------------|---------------------------|
| 1. $y = x^2 - 2x$ | 2. $y = x^2 + 2x - 3$ | 3. $y = \sqrt{x-2}$ |
| 4. $y = 4 - x^2$ | 5. $y = x^2 + 2x + 1$ | 6. $y = -\sqrt{x} + 3$ |
| 7. $y = -x^2 + 2x - 1$ | 8. $y = x + 2 $ | 9. $y = 2\sqrt[3]{x} - 1$ |

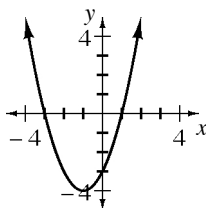
Respuestas

1.



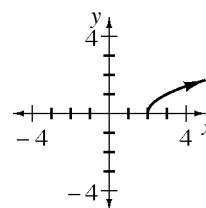
Parábola; puntos de corte $(0, 0)$, $(2, 0)$; decreciente hasta $x = 1$ luego creciente; valor mínimo en $(1, -1)$; $x = 1$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son mayores o iguales a -1 .

2.



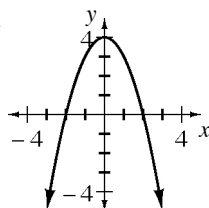
Parábola; puntos de corte $(-3, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, -3)$; decreciente hasta $x = -1$, luego creciente; valor mínimo en $(-1, -4)$; $x = -1$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son mayores o iguales a -4 .

3.



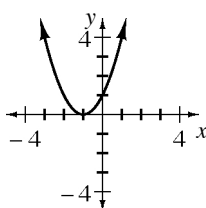
Media parábola; punto inicial, punto de corte y punto mínimo $(2, 0)$; creciente para $x > 2$. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número mayor o igual a 2. Los valores de salida son mayores o iguales a 0.

4.



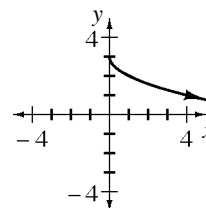
Parábola; puntos de corte $(-2, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 4)$; creciente para $x < 0$, decreciente para $x > 0$; valor máximo en $(0, 4)$; $x = 0$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son menores o iguales a 4.

5.



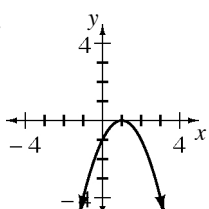
Parábola; punto de corte $(-1, 0)$; decreciente para $x < -1$, creciente para $x > -1$; valor mínimo en $(-1, 0)$; $x = -1$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son mayores o iguales a 0.

6.



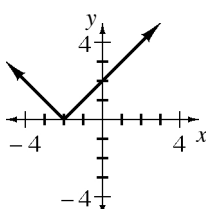
Media parábola; punto inicial, punto de corte y punto máximo $(0, 3)$; decreciente para $x > 0$. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número mayor o igual a 0. Los valores de salida son menores o iguales a 3.

7.



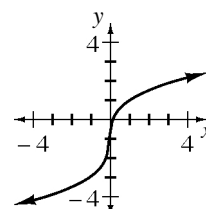
Parábola; puntos de corte $(1, 0)$ y $(0, -1)$; creciente para $x < 1$, decreciente para $x > 1$; valor máximo en $(1, 0)$; $x = 1$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son menores o iguales a 0.

8.



Forma de "V"; puntos de corte $(-2, 0)$ and $(0, 2)$; decreciente para $x < -2$, creciente para $x > -2$; valor mínimo en $(-2, 0)$; $x = -2$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son mayores o iguales a 0.

9.



Forma de "S"; puntos de corte $(0, -1)$ and $(0.125, 0)$; creciente para todos los valores de x de izquierda a derecha. Los valores de entrada y de salida pueden estar conformados por cualquier número real. No hay una línea de simetría.

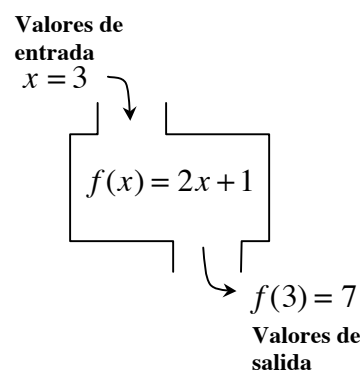
La relación entre los valores de entrada (generalmente x) y los valores de salida (generalmente y) se denomina función si por cada valor de entrada hay solamente un valor de salida. Las funciones pueden representarse mediante la ilustración de una “máquina” de entrada–salida, como se muestra en la Lección 1.2.3 del libro de texto y en el diagrama del Ejemplo 1 a continuación.

El conjunto de todos los posibles valores de entrada de una relación se denomina **dominio**, mientras que el conjunto de todos los posibles valores de salida de una relación se denomina **rango**.

Para obtener información adicional sobre funciones, notación de funciones y dominio y rango, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 1.2.5.

Ejemplo 1

Los números, representados por una letra o símbolo como x , se ingresan a la máquina de funciones denominada f de a uno a la vez, y luego la función realiza la operación sobre cada valor de entrada para determinar cada valor de salida, $f(x)$. Por ejemplo, cuando $x = 3$ se coloca en la función f de la derecha, la máquina multiplica 3 por 2 y suma 1 para obtener el valor de salida, $f(x)$ que es 7. La notación $f(3) = 7$ indica que la función denominada f conecta el valor de entrada $x = 3$ con el valor de salida 7. Esto también significa que el punto $(3, 7)$ se ubica en el gráfico de la función.



Ejemplo 2

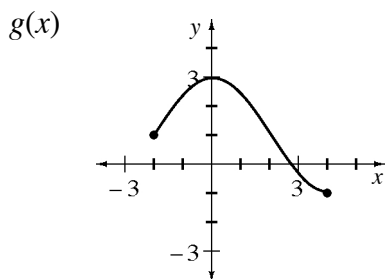
a. Si $f(x) = \sqrt{x-2}$ entonces $f(11) = ?$ $f(11) = \sqrt{11-2} = \sqrt{9} = 3$

b. Si $g(x) = 3 - x^2$ entonces $g(5) = ?$ $g(5) = 3 - (5)^2 = 3 - 25 = -22$

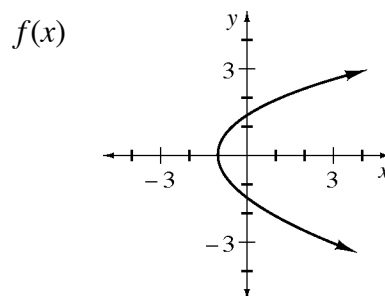
c. Si $f(x) = \frac{x+3}{2x-5}$ entonces $f(2) = ?$ $f(2) = \frac{2+3}{2 \cdot 2 - 5} = \frac{5}{-1} = -5$

Ejemplo 3

Una relación en la que cada valor de entrada tiene solo un valor de salida recibe el nombre de **función**.



$g(x)$ es una función: cada valor de entrada (x) tiene solo un valor de salida (y).
 $g(-2) = 1$, $g(0) = 3$, $g(4) = -1$, y así sucesivamente.



$f(x)$ no es una función: cada valor de entrada mayor de -1 está asociado a dos valores de y . $f(1) = 2$ y $f(1) = -2$.

Ejemplo 4

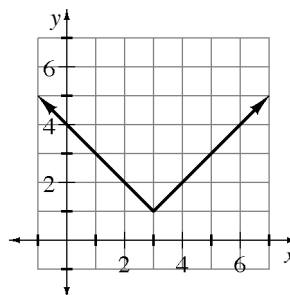
El conjunto de todos los posibles valores de entrada de una relación se denomina **dominio**, mientras que el conjunto de todos los posibles valores de salida de una relación se conoce como **rango**.

En el Ejemplo 3 anterior, el dominio de $g(x)$ es $-2 \leq x \leq 4$, o “todos los números entre -2 y 4 ”. El rango es $-1 \leq y \leq 3$ o “todos los números entre -1 y 3 ”.

El dominio de $f(x)$ en el Ejemplo 3 anterior es $x \geq -1$ o “cualquier número real mayor o igual a -1 ”, dado que el gráfico comienza en -1 y continúa siempre hacia la derecha. Dado que el gráfico de $f(x)$ se extiende siempre hacia las direcciones positivas y negativas de y , el rango consiste en “todos los números reales”.

Ejemplo 5

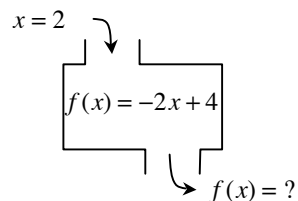
Para el gráfico de la derecha, dado que los valores de x se extienden siempre en ambas direcciones, el dominio está formado por “todos los números reales”. Los valores de y comienzan en 1 y ascienden de forma tal que el rango es $y \geq 1$ o “todos los números mayores o iguales a 1 ”.



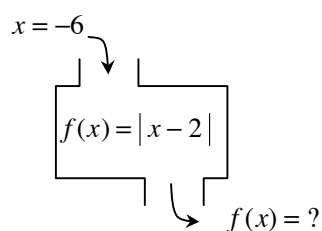
Problemas

Determina los valores de entrada para los valores de salida dados de las siguientes funciones.

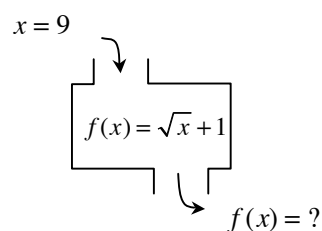
1.



2.



3.



4. $f(x) = (5 - x)^2$
 $f(8) = ?$

5. $g(x) = x^2 - 5$
 $g(-3) = ?$

6. $f(x) = \frac{2x+7}{x^2-9}$
 $f(3) = ?$

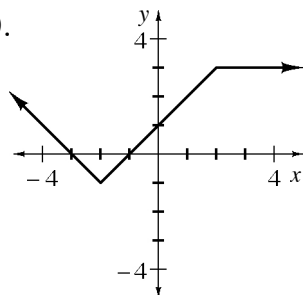
7. $h(x) = 5 - \sqrt{x}$
 $h(9) = ?$

8. $h(x) = \sqrt{5 - x}$
 $h(9) = ?$

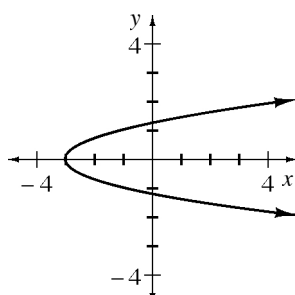
9. $f(x) = -x^2$
 $f(4) = ?$

Determina si cada una de las siguientes relaciones es una función. Luego indica su dominio y rango.

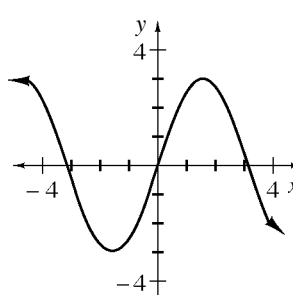
10.



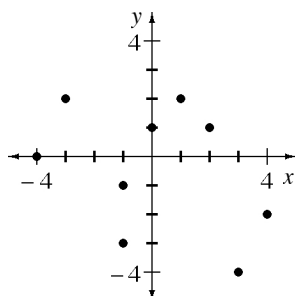
11.



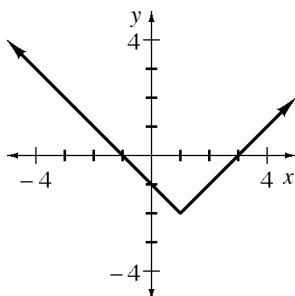
12.



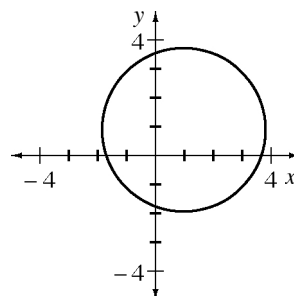
13.



14.



15.



Respuestas

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $f(2) = 0$ | 2. $f(-6) = 8$ | 3. $f(9) = 4$ |
| 4. $f(8) = 9$ | 5. $g(-3) = 4$ | 6. no es posible |
| 7. $f(9) = 2$ | 8. no es posible | 9. $f(4) = -16$ |
| 10. Sí, cada valor de entrada tiene un valor de salida; el dominio está compuesto por todos los números, el rango es $-1 \leq y \leq 3$ | 11. No, por ejemplo $x = 0$ tiene dos valores de salida; el dominio es $x \geq -3$, el rango está compuesto por todos los números | 12. Sí; el dominio está compuesto por todos los números, el rango es $-3 \leq y \leq 3$ |
| 13. No; $x = -1$ tiene dos valores de salida; el dominio es $-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, el rango es $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ | 14. Sí; el dominio está compuesto por todos los números, el rango es $y \geq -2$ | 15. No, varios valores de entrada tienen dos valores de salida; el dominio es $-2 \leq x \leq 4$ y el rango es $-2 \leq y \leq 4$ |