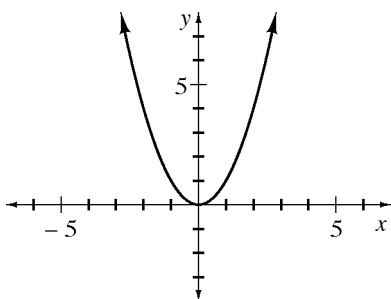


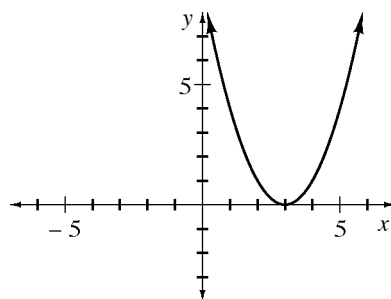
La ecuación más simple de una forma (recta, parábola, valor absoluto, etc.) es lo que llamamos una ecuación madre. Modificar una ecuación madre agregando una suma o multiplicación desplaza y cambia el tamaño y la orientación del gráfico madre pero no altera su forma básica. Estos cambios reciben el nombre de **transformaciones**. El primer conjunto de ejemplos muestra cómo puedes mover el gráfico madre de una parábola en un sistema de coordenadas xy . En cursos futuros, aprenderás a hacer que una parábola sea más ancha o más angosta. Los demás tipos de funciones se transforman en formas similares.

Ejemplos

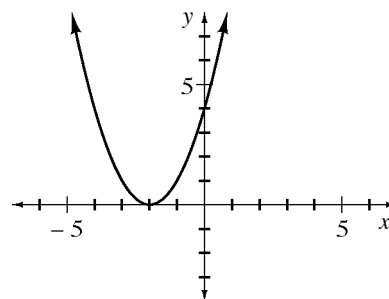
$f(x) = x^2$
el gráfico madre



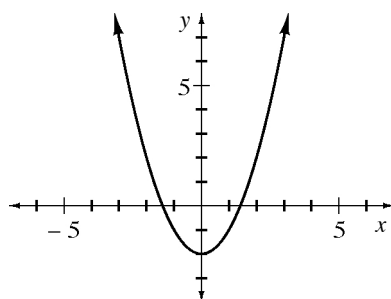
$f(x-3) = (x-3)^2$
3 unidades a la derecha



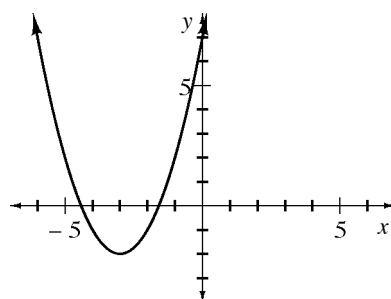
$f(x+2) = (x+2)^2$
2 unidades a la izquierda



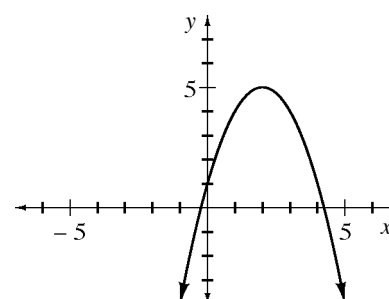
$f(x)-2 = x^2-2$
2 unidades hacia abajo



$f(x+3)-2 = (x+3)^2-2$
3 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia abajo



$-f(x-2)+5 = -(x-2)^2+5$
2 unidades a la derecha, 5 unidades hacia arriba, y reflejada respecto del eje x .



Problemas

Predice cómo se diferenciará cada parábola de su gráfico madre. El gráfico madre de todos estos problemas es $f(x) = x^2$.

1. $y = f(x + 5)$

2. $y = f(x) + 5$

3. $y = -f(x)$

4. $y = f(x) - 4$

5. $y = f(x - 5)$

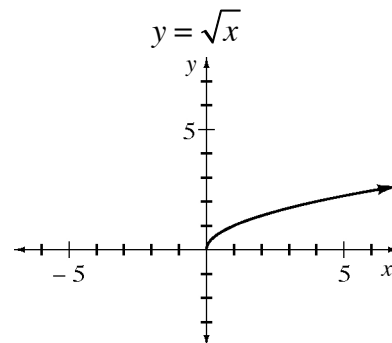
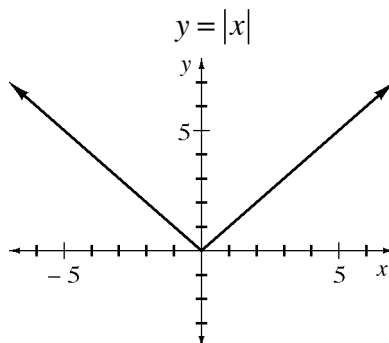
6. $y = -f(x + 2)$

7. $y = f(x - 5) - 3$

8. $y = -f(x + 2) + 1$

9. $y = f(x - 3) - 5$

A la derecha, puedes ver los gráficos madre de las funciones con valores absolutos y raíces cuadradas. Se transforman de la misma forma que las parábolas. Predice en qué se diferenciará el gráfico de cada ecuación a continuación del gráfico madre.



10. $f(x - 4)$ donde $f(x) = |x|$

11. $f(x) + 5$ donde $f(x) = \sqrt{x}$

12. $f(x) + 3$ donde $f(x) = |x|$

13. $f(x + 2)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$

14. $-f(x) + 5$ donde $f(x) = |x|$

15. $-f(x)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$

16. $-f(x + 3)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$

17. $-f(x - 5)$ donde $f(x) = |x|$

18. $-f(x - 2) + 5$ donde $f(x) = \sqrt{x}$

19. $f(x) + 3$ donde $f(x) = \sqrt{x}$

20. $f(x - 7)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$

21. $-f(x + 3) + 7$ donde $f(x) = |x|$

Respuestas

1. 5 a la izquierda

2. 5 hacia arriba

 3. reflejada respecto del eje x

4. 4 hacia abajo

5. 5 hacia izquierda

 6. 2 a la izquierda, reflejada respecto del eje x

7. 5 a la derecha, 3 hacia abajo

 8. 2 a la izquierda, 1 hacia arriba, reflejada respecto del eje x

9. 3 a la derecha, 5 hacia abajo

10. 4 a la derecha

11. 5 hacia arriba

12. 3 hacia arriba

13. 2 a la izquierda

 14. 5 hacia arriba, reflejada respecto del eje x

 15. reflejada respecto del eje x

 16. 3 a la izquierda, reflejada respecto del eje x

 17. 5 a la derecha, reflejada respecto del eje x

 18. 2 a la derecha, 5 hacia arriba, reflejada respecto del eje x

19. 3 hacia arriba

20. 7 a la derecha

 21. 3 a la izquierda, 7 hacia arriba, reflejada respecto del eje x

Las distribuciones de datos pueden representarse gráficamente con histogramas y diagramas de cajas. Los diagramas de cajas se describen en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 11.2.1. Para más ayuda con los histogramas, consulta la *Guías para padres con práctica adicional* para Lección 1.1.4 de *Core Connections en español, Curso 1*, disponible sin cargo en cpm.org.

Dos distribuciones de datos se pueden comparar por medio de su centro, forma, dispersión y valores atípicos.

El centro, o valor “típico” de una distribución de datos, se puede describir usando la mediana. Si la distribución es simétrica y no presenta valores atípicos, el centro se puede describir utilizando la media.

Puedes hallar las formas comunes de las distribuciones de datos en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 11.2.2.

La dispersión de una distribución puede describirse con el rango intercuartil (RIC), descrito en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 11.2.1, o la desviación estándar, descrita en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 11.2.3. Ya que la desviación estándar se basa en la media, solo se debería usar para describir la dispersión de distribuciones simétricas sin valores atípicos.

Un valor atípico es un dato que se encuentra muy alejado de la mayoría de los datos.

Ejemplo 1

Los profesores de las universidades privadas se quejan de que las clases de Literatura Inglesa de las universidades públicas no son suficientemente exigentes. Específicamente, los profesores afirman que los cursos de literatura en las universidades públicas no asignan suficientes novelas a los alumnos para leer. Una estadística de alumnos de universidades públicas recabó los datos a continuación sobre 42 cursos de literatura en universidades públicas y privadas del estado. Compara la cantidad de novelas leídas en los dos tipos de universidades.

Cantidad de novelas asignadas en cursos de literatura de universidades públicas:

13, 10, 15, 12, 14, 9, 11, 15, 12, 14, 9, 10, 13, 15, 12, 9, 11, 15, 12, 10, 15, 14 Total: 270

Cantidad de novelas asignadas en cursos de literatura de universidades privadas:

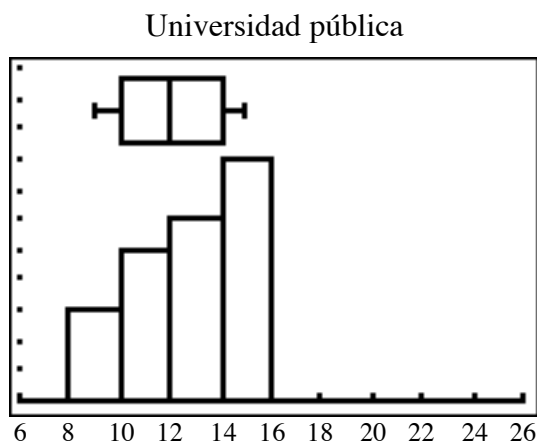
11, 8, 14, 13, 25, 11, 7, 13, 8, 16, 11, 10, 20, 7, 8, 13, 14, 16, 18, 10 Total: 253

La solución continúa en la página siguiente →

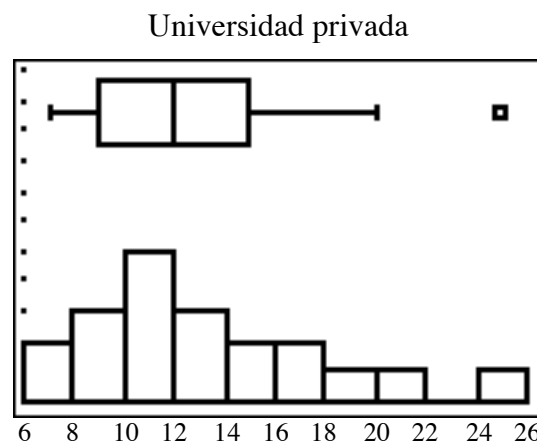
Solución

Todo análisis de una distribución de datos debería comenzar con una representación gráfica de los datos. Para los histogramas de abajo se eligió un intervalo de dos. A fin de que sea posible comparar ambas distribuciones, ambos gráficos tienen la misma escala en el eje x , y fueron graficados uno sobre el otro. Si necesitas ayuda con el uso de una calculadora TI-83+/84+, consulta tu libro digital o studenthelp.cpm.org.

El *total* se utiliza para verificar que los datos hayan sido ingresados correctamente en el dispositivo de graficación. La suma del conjunto de datos, determinada por las funciones estadísticas de la calculadora, debería coincidir con el valor *total* dado.



Síntesis de cinco números
(9, 10, 12, 14, 15)



Síntesis de cinco números
(7, 9, 12, 15, 25)

Al comparar las distribuciones, deberías considerar su centro, forma, dispersión, y valores atípicos. Ya que ninguna de las distribuciones es simétrica y una de las distribuciones tiene un valor atípico, no sería apropiado compararlas utilizando las medias o desviaciones estándar. Las síntesis de cinco números (consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 11.2.1) fueron incluidas a la derecha de cada gráfico.

Centro: Ambos tipos de universidades asignan la misma mediana de 12 novelas.

La solución continúa en la página siguiente →

Continuación de la solución de la página anterior.

Forma: la distribución para las universidades públicas es sesgada, con un mínimo de entre 8 y 9 novelas que aumenta hasta un máximo de 14 a 15 novelas. La distribución en las universidades privadas es sesgada en la otra dirección, con un máximo de entre 10 y 11 novelas.

Dispersión: la variabilidad en la cantidad de novelas asignadas en las universidades públicas es mucho menor que la variabilidad entre cursos en universidades privadas. El rango intercuartil para las universidades públicas es de 4 novelas ($14 - 10 = 4$), mientras que el rango intercuartil para las universidades privadas, de 6 ($15 - 9 = 6$), es un 50% más amplio.

Valores atípicos: un curso en una universidad privada es un valor atípico; en él se asignan 25 libros. El valor de 25 libros se aleja mucho de la mayoría de los datos para universidades privadas. Las calculadoras TI-83/84+ pueden señalar valores atípicos en un diagrama de cajas con puntos.

Conclusiones: los profesores de universidades privadas afirman que sus cursos son más exigentes porque asignan más novelas. Sin embargo, los datos no respaldan esa afirmación. El 25% de los cursos de universidades privadas asignan más novelas que cualquiera de los cursos de universidades públicas (el valor en el extremo derecho, o el 25% superior de los cursos de las universidades privadas, se encuentra fuera del diagrama de cajas de las universidades públicas). Pero el 25% de las clases en universidades privadas asignan *menos* libros que cualquiera de las universidades públicas (el valor en el extremo izquierdo, o el 25% inferior de las universidades privadas, se encuentra *debajo* del diagrama de cajas de las universidades públicas). Asimismo, la mediana de novelas asignadas en los dos tipos de universidades es igual: 12 libros. La cantidad de novelas asignadas en las universidades públicas es más consistente (el rango intercuartil es 4) que la cantidad de novelas asignadas en las universidades privadas (el rango intercuartil es 6).

Ejemplo 2

Un criador de conejos registró la cantidad de crías de cinco conejas este año. Estas tuvieron 243, 215, 184, 280, y 148 crías, respectivamente. Muestra cómo calcular la media y la desviación estándar de la cantidad de crías por coneja sin usar las funciones estadísticas de tu calculadora.

La media es $\frac{243+215+184+280+148}{5} = 214$ crías.

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la distancia promedio hasta la media, después de que las distancias han sido hechas positivas elevándolas al cuadrado. Para hallar la desviación estándar, primero hallar la distancia a la que se halla cada coneja de la media:

$$243 - 214 = 29, 215 - 214 = 1, 184 - 214 = -30, 280 - 214 = 66, 148 - 214 = -66.$$

Halla el cuadrado de cada distancia: $29^2 = 841, 1^2 = 1, (-30)^2 = 900, 66^2 = 4356, (-66)^2 = 4356$.

La distancia media cuadrada es: $\frac{841+1+900+4356+4356}{5} = 2090.8$

La raíz cuadrada es 45.725. Ya que las medidas originales eran números enteros, el resultado final también debería ser un entero. La cantidad media de crías por coneja es de 214, con una desviación estándar de 46 crías.

Problemas

- Los distintos tipos de sapos suelen poner distintas cantidades de huevos. Los datos de abajo corresponden a dos especies distintas. Compara la cantidad de huevos puestos por el sapo americano y el sapo de Fowler. ¿Es apropiado sintetizar las distribuciones usando la media y la desviación estándar? Usa un intervalo de 250 huevos.

Sapo americano: 9100, 8700, 10300, 9500, 7800, 8900, 9200, 9300, 8900, 8300, 9400, 8000, 9000, 8400, 9700, 10000, 8600, 8900, 9900, 9300 *Total: 181,200.*

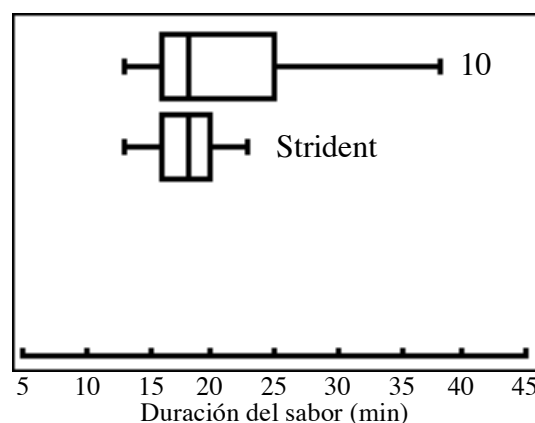
Sapo de Fowler: 9500, 9100, 9400, 8800, 9000, 8400, 9200, 9200, 8900, 9100, 8600, 9200, 8700, 9800, 9300, 8800, 9200, 9300, 9000, 9100 *Total: 181,600.*

- Sin usar las funciones estadísticas de tu calculadora, halla la desviación estándar de la cantidad de huevos puestos por cada uno de los cinco primeros sapos americanos.
- ¿Los bebés que pesan menos al nacer comienzan a gatear más tarde que los bebés nacidos con el peso promedio correspondiente? Un psicólogo recabó los datos de abajo sobre la edad a la que los niños comienzan a gatear:

Bebés de peso bajo: 10, 12, 11, 11, 7, 13, 10, 12, 11, 13, 10, 11, 15, 11, 14, 10 meses
Total: 181.

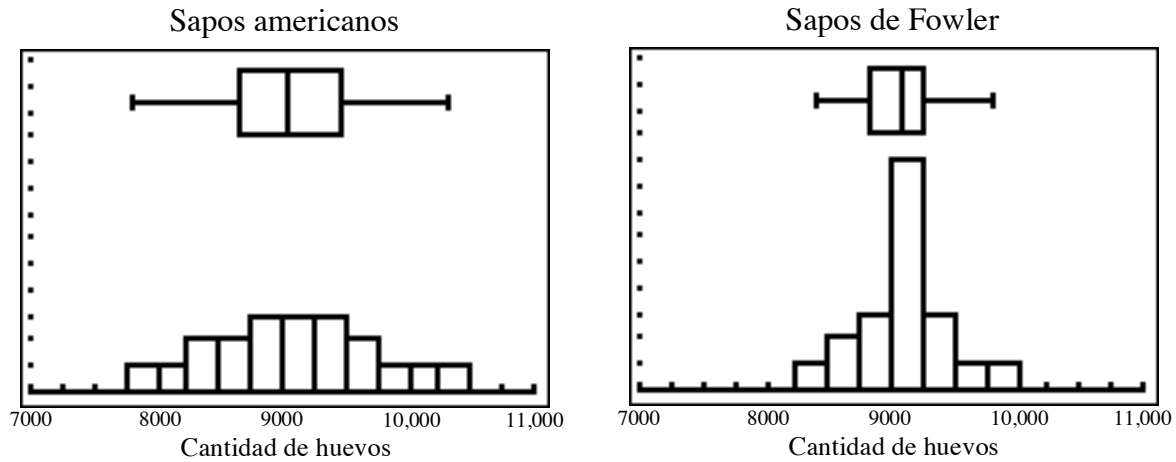
Bebés de peso promedio: 7, 6, 13, 9, 8, 7, 5, 7, 9, 8, 10, 8, 11, 7, 7, 10, 6, 8, 7, 6, 12, 8, 7 meses
Total: 186.

- Compara la cantidad de tiempo que duró el sabor de una goma de mascar marca “10” con la cantidad de tiempo que duró el sabor de una goma de mascar marca “Strident”. Observa el gráfico de la derecha. Estima la media para cada tipo de goma de mascar.



Respuestas

1.

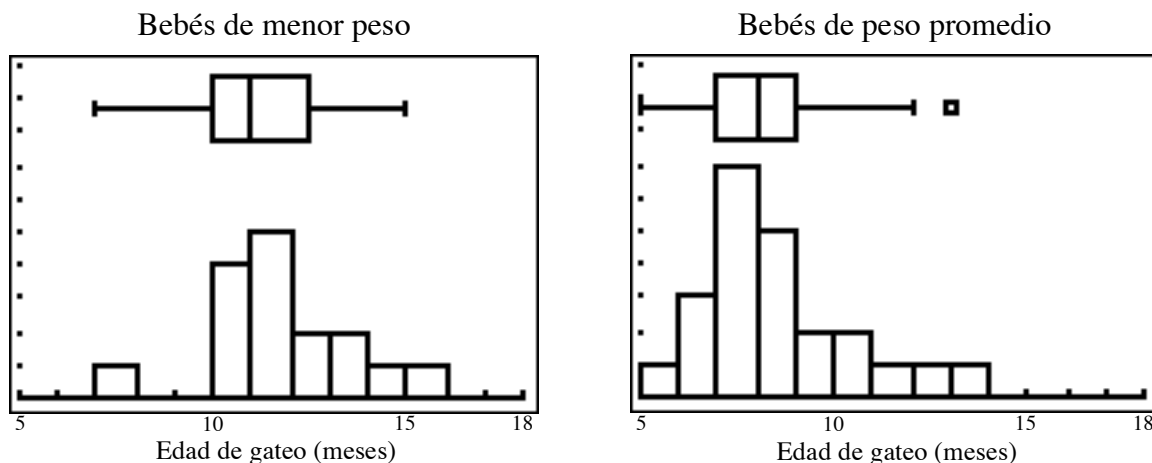


La media y la desviación estándar son estadísticas apropiadas porque ambas distribuciones son bastante simétricas y no presentan valores atípicos.

Ambos sapos ponen una media de entre 9000 y 9100 huevos. Ambas distribuciones presentan un solo pico, son simétricas, y no presentan valores atípicos aparentes. Sin embargo, hay mucha más variabilidad en la cantidad de huevos puestos por el sapo americano. La desviación estándar para el sapo americano es aproximadamente 637, mientras que la desviación estándar para el sapo de Fowler es aproximadamente la mitad, cerca de 316 huevos.

2.
$$\sqrt{\frac{20^2 + (-380)^2 + 1220^2 + 420^2 + (-1280)^2}{5}} \approx 830 \text{ huevos}$$

3.



La mediana y el rango intercuartil se utilizarán para comparar las estadísticas porque la mediana y la desviación estándar no son apropiadas, ambas distribuciones son sesgadas y presentan un valor atípico.

La mediana de las edades a las que los bebés de menor peso comienzan a gatear es 11 meses, mientras que la mediana para los bebés de peso promedio es 8 meses.

Ambas distribuciones presentan un solo pico y son sesgadas. Los bebés de menor peso parecen tener un valor atípico en 7 meses, si bien la calculadora no lo identifica como un verdadero valor atípico. Los bebés de peso promedio tienen un valor atípico en 13 meses.

La variabilidad en la edad de gateo es casi igual para los bebés de menor peso (el rango intercuartil es 2.5 meses) y los bebés de peso promedio (el rango intercuartil es 2 meses).

Los bebés de menor peso tienen un desarrollo retrasado por aproximadamente 3 meses. Cerca del 75% de los bebés de menor peso no han comenzado a gatear a la edad a la que el 75% de los bebés de peso promedio ya gatean.

4. La mediana para ambos tipos de goma de mascar es de aproximadamente 18 minutos de sabor. Los tiempos de “10” eran sesgados, mientras que los de Strident eran simétricos. La mitad inferior de las distribuciones para ambas gomas de mascar fue la misma, pero hubo mucha más variabilidad en la mitad superior de “10” que en la mitad superior de Strident. De hecho, más del 25% de quienes comieron “10” dijeron que el sabor duró más que cualquier consumidor de Strident. Ninguna goma de mascar presentó valores atípicos.

Hubo más variabilidad en la duración del sabor de “10” — El rango intercuartil fue de aproximadamente 9 minutos ($25 - 16 = 9$). El rango intercuartil de Strident, 4 minutos ($20 - 16 = 4$), fue menos de la mitad del de “10”. Esa variabilidad es una ventaja. Si comes goma de mascar marca “10”, no te irá peor que si comes Strident, y tendrás sabor por mucho más tiempo.

La media para Strident es aproximadamente igual a la mediana, ya que la distribución es simétrica, aproximadamente 18 minutos. Pero la media para “10” es de más de 18 minutos porque la dispersión es sesgada, tal vez unos 22 minutos.