

PROPIEDADES DE LA POTENCIA

3.1.1 y 3.1.2

Por lo general, simplificar una expresión que contiene exponentes significa eliminar los paréntesis y exponentes negativos, de ser posible. A continuación se mencionan las **propiedades básicas de la potencia**.

- | | | |
|-----|-----------------------------|---|
| (1) | $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ | Ejemplos: $x^3 \cdot x^4 = x^7$; $2^7 \cdot 2^4 = 2^{11}$ |
| (2) | $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ | Ejemplos: $\frac{x^{10}}{x^4} = x^6$; $\frac{2^4}{2^7} = 2^{-3}$ |
| (3) | $(x^a)^b = x^{ab}$ | Ejemplos: $(x^4)^3 = x^{12}$; $(2x^3)^5 = 2^5 \cdot x^{15} = 32x^{15}$ |
| (4) | $x^0 = 1$ | Ejemplos: $2^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ |
| (5) | $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ | Ejemplos: $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$; $y^{-4} = \frac{1}{y^4}$; $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ |
| (6) | $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$ | Ejemplos: $\frac{1}{x^{-5}} = x^5$; $\frac{1}{x^{-2}} = x^2$; $\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$ |
| (7) | $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ | Ejemplos: $x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$; $y^{1/2} = \sqrt{y}$ |

En todas las expresiones con fracciones, partimos de la base de que el denominador no es igual a cero.

Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 3.1.2. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta los problemas del Punto de comprobación 5A que se incluyen al final del libro.

Ejemplo 1

Simplificar: $(2xy^3)(5x^2y^4)$

Reordenar: $2 \cdot 5 \cdot x \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot y^4$

Usar principio (1): $10x^3y^7$

Ejemplo 2

Simplificar: $\frac{14x^2y^{12}}{7x^5y^7}$

Separar: $\left(\frac{14}{7}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^5}\right) \cdot \left(\frac{y^{12}}{y^7}\right)$

Usar principios (2) y (5): $2x^{-3}y^5 = \frac{2y^5}{x^3}$

Ejemplo 3

Simplificar: $(3x^2y^4)^3$

Usar principio (3): $3^3 \cdot (x^2)^3 \cdot (y^4)^3$

Usar principio (3) de nuevo: $27x^6y^{12}$

Ejemplo 4

Simplificar: $(2x^3)^{-2}$

Usar principio (5): $\frac{1}{(2x^3)^2}$

Usar principio (3): $\frac{1}{2^2 \cdot (x^3)^2}$

Usar principio (3) de nuevo: $\frac{1}{4x^6}$

Ejemplo 5

Simplificar: $\frac{10x^7y^3}{15x^{-2}y^3}$

Separar: $\left(\frac{10}{15}\right) \cdot \left(\frac{x^7}{x^{-2}}\right) \cdot \left(\frac{y^3}{y^3}\right)$

Usar principio (2): $\frac{2}{3}x^9y^0$

Usar principio (4): $\frac{2}{3}x^9 \cdot 1 = \frac{2}{3}x^9 = \frac{2x^9}{3}$

Problemas

Simplifica las siguientes expresiones. Las respuestas finales no deben contener paréntesis ni exponentes negativos.

1. $y^5 \cdot y^7$

2. $b^4 \cdot b^3 \cdot b^2$

3. $8^6 \cdot 8^{-2}$

4. $(y^5)^2$

5. $(3a)^4$

6. $\frac{m^8}{m^3}$

7. $\frac{12m^8}{6m^{-3}}$

8. $(x^3y^2)^3$

9. $\frac{(y^4)^2}{(y^3)^2}$

10. $\frac{15x^2y^5}{3x^4y^5}$

11. $(4c^4)(ac^3)(3a^5c)$

12. $(7x^3y^5)^2$

13. $(4xy^2)(2y)^3$

14. $\left(\frac{4}{x^2}\right)^3$

15. $\frac{(2a^7)(3a^2)}{6a^3}$

16. $\left(\frac{5m^3n}{m^5}\right)^3$

17. $(3a^2x^3)^2(2ax^4)^3$

18. $\left(\frac{x^3y}{y^4}\right)^4$

19. $\left(\frac{6x^8y^2}{12x^3y^7}\right)^2$

20. $\frac{(2x^5y^3)^3(4xy^4)^2}{8x^7y^{12}}$

21. x^{-3}

22. $2x^{-3}$

23. $(2x)^{-3}$

24. $(2x^3)^0$

25. $5^{1/2}$

26. $\left(\frac{2x}{3}\right)^{-2}$

Respuestas

- | | | |
|------------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1. y^{12} | 2. b^9 | 3. 8^4 |
| 4. y^{10} | 5. $81a^4$ | 6. m^5 |
| 7. $2m^{11}$ | 8. x^9y^6 | 9. y^2 |
| 10. $\frac{5}{x^2}$ | 11. $12a^6c^8$ | 12. $49x^6y^{10}$ |
| 13. $32xy^5$ | 14. $\frac{64}{x^6}$ | 15. a^6 |
| 16. $\frac{125n^3}{m^6}$ | 17. $72a^7x^{18}$ | 18. $\frac{x^{12}}{y^{12}}$ |
| 19. $\frac{x^{10}}{4y^{10}}$ | 20. $16x^{10}y^5$ | 21. $\frac{1}{x^3}$ |
| 22. $\frac{2}{x^3}$ | 23. $\frac{1}{8x^3}$ | 24. 1 |
| 25. $\sqrt{5}$ | 26. $\frac{9}{4x^2}$ | |

ECUACIONES ↔ AZULEJOS ALGEBRAICOS

3.2.1

Se puede utilizar un tablero de ecuaciones junto con azulejos algebraicos para representar el proceso de resolución de ecuaciones. Si necesitas ayuda con la Lección 3.2.1, consulta las Lecciones A.1.1 a A.1.9 de esta *Guía para padres con práctica adicional*.

Los recuadros de Apuntes de matemáticas de la Lección A.1.8 (en el Apéndice del libro) y la Lección 3.2.1 contienen una lista de todos los movimientos “legales” y sus equivalentes algebraicos correspondientes. Consulta también el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección A.1.9 (en el Apéndice del libro) para verificar las soluciones.

Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta los problemas del Punto de comprobación 1 que se incluye al final del libro.

El área de un triángulo se puede hallar de dos formas: como producto de la (altura) · (base) o como la suma de las áreas de las partes individuales del rectángulo. Para un rectángulo dado, estas dos áreas deben ser iguales, así que **área como producto = área como suma**. Los azulejos algebraicos y, más adelante, los rectángulos genéricos permiten crear modelos de áreas que nos ayudan a multiplicar expresiones de forma visual y concreta.

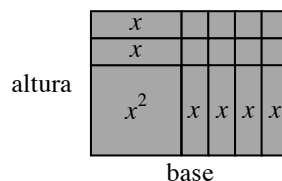
Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 3.2.2, 3.2.3, o 3.3.3. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material del Punto de comprobación 6B que se incluye al final del libro.

Ejemplo 1: Uso de azulejos algebraicos

Los azulejos algebraicos $x^2 + 6x + 8$ se colocaron en un rectángulo como se ve a la derecha. El área del rectángulo puede escribirse como el **producto** de su base y su altura o como la **suma** de sus partes.

$$\underbrace{(x+4)}_{\text{base}} \underbrace{(x+2)}_{\text{altura}} = \underbrace{x^2 + 6x + 8}_{\text{área}}$$

área como **producto** área como **suma**



Ejemplo 2: Uso de rectángulos genéricos

Un rectángulo genérico nos permite organizar el problema de la misma forma que en el primer ejemplo pero sin tener que dibujar cada uno de los azulejos. No es necesario dibujarlo en forma precisa o a escala.

Multiplicar $\underbrace{(2x+1)}_{\text{base}} \underbrace{(x-3)}_{\text{altura}}$

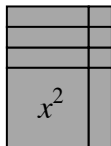
$$\begin{array}{|c|c|} \hline -3 & \\ \hline x & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 2x & +1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline -3 & -6x \\ \hline x & 2x^2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline -3 & x \\ \hline \end{array} \Rightarrow (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 5x - 3$$

área como producto área como suma

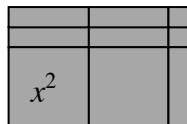
Problemas

Escribe un enunciado que demuestre que el **área como producto** es igual al **área como suma**.

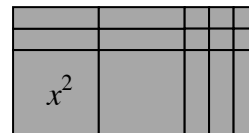
1.



2.



3.



4.

$$\begin{array}{r|cc} x & x^2 & 3x \\ \hline -5 & -5x & -15 \\ \hline & x & +3 \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{r|cc} 6 & 18y & -12x \\ \hline & 3y & -2x \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{r|cc} 3y & 3xy & 12y \\ \hline -2 & -2x & -8 \\ \hline & x & +4 \end{array}$$

Multiplica.

- | | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 7. $(3x + 2)(2x + 7)$ | 8. $(2x - 1)(3x + 1)$ | 9. $(2x)(x - 1)$ |
| 10. $(2y - 1)(4y + 7)$ | 11. $(y - 4)(y + 4)$ | 12. $(y)(x - 1)$ |
| 13. $(3x - 1)(x + 2)$ | 14. $(2y - 5)(y + 4)$ | 15. $(3y)(x - y)$ |
| 16. $(3x - 5)(3x + 5)$ | 17. $(4x + 1)^2$ | 18. $(x + y)(x + 2)$ |
| 19. $(2y - 3)^2$ | 20. $(x - 1)(x + y + 1)$ | 21. $(x + 2)(x + y - 2)$ |

Respuestas

- | | | |
|--------------------------------------|---|--------------------------|
| 1. $(x + 1)(x + 3) = x^2 + 4x + 3$ | 2. $(x + 2)(2x + 1) = 2x^2 + 5x + 2$ | |
| 3. $(x + 2)(2x + 3) = 2x^2 + 7x + 6$ | 4. $(x - 5)(x + 3) = x^2 - 2x - 15$ | |
| 5. $6(3y - 2x) = 18y - 12x$ | 6. $(x + 4)(3y - 2) = 3xy - 2x + 12y - 8$ | |
| 7. $6x^2 + 25x + 14$ | 8. $6x^2 - x - 1$ | 9. $2x^2 - 2x$ |
| 10. $8y^2 + 10y - 7$ | 11. $y^2 - 16$ | 12. $xy - y$ |
| 13. $3x^2 + 5x - 2$ | 14. $2y^2 + 3y - 20$ | 15. $3xy - 3y^2$ |
| 16. $9x^2 - 25$ | 17. $16x^2 + 8x + 1$ | 18. $x^2 + 2x + xy + 2y$ |
| 19. $4y^2 - 12y + 9$ | 20. $x^2 + xy - y - 1$ | 21. $x^2 + xy + 2y - 4$ |

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON MULTIPLICACIÓN O VALORES ABSOLUTOS

3.3.1

Para **resolver una ecuación con multiplicación**, primero usa la Propiedad distributiva o un rectángulo genérico para reescribir la ecuación sin paréntesis. Luego resuelve de la forma habitual. Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 3.3.1. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material del Punto de comprobación 6B que se incluye al final del libro.

Para **resolver una ecuación con un valor absoluto**, primero divide el problema en dos casos, ya que la cantidad dentro de un valor absoluto puede ser positiva o negativa. Luego, resuelve cada parte de la forma habitual.

Ejemplo 1

Resuelve $6(x + 2) = 3(5x + 1)$

Usa la Propiedad distributiva.

$$6x + 12 = 15x + 3$$

Resta $6x$.

$$12 = 9x + 3$$

Resta 3.

$$9 = 9x$$

Divide por 9.

$$1 = x$$

Ejemplo 2

Resuelve $x(2x - 4) = (2x + 1)(x + 5)$

Reescribe la ecuación usando la Propiedad distributiva del lado izquierdo del signo de igual y un rectángulo genérico del lado derecho.

$$2x^2 - 4x = \begin{array}{|c|c|} \hline +5 & 10x & 5 \\ \hline x & 2x^2 & x \\ \hline \end{array}$$

$$2x^2 - 4x = 2x^2 + 11x + 5$$

Resta $2x^2$ en ambos lados.

$$-4x = 11x + 5$$

Resta $11x$ en ambos lados.

$$-15x = 5$$

Divide por -15 .

$$x = \frac{5}{-15} = -\frac{1}{3}$$

Ejemplo 3

Resuelve $|2x-3|=7$

Separa en dos casos.

$$2x-3=7 \quad \text{o} \quad 2x-3=-7$$

Suma 3.

$$2x=10 \quad \text{o} \quad 2x=-4$$

Divide por 2.

$$x=5 \quad \text{o} \quad x=-2$$

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones.

1. $3(c+4)=5c+14$
2. $x-4=5(x+2)$
3. $7(x+7)=49-x$
4. $8(x-2)=2(2-x)$
5. $5x-4(x-3)=8$
6. $4y-2(6-y)=6$
7. $2x+2(2x-4)=244$
8. $x(2x-4)=(2x+1)(x-2)$
9. $(x-1)(x+7)=(x+1)(x-3)$
10. $(x+3)(x+4)=(x+1)(x+2)$
11. $2x-5(x+4)=-2(x+3)$
12. $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$
13. $(x-3)(x+5)=x^2-7x-15$
14. $(x+2)(x-2)=(x+3)(x-3)$
15. $\frac{1}{2}x(x+2)=\left(\frac{1}{2}x+2\right)(x-3)$
16. $|3x+2|=11$
17. $|5-x|=9$
18. $|3-2x|=7$
19. $|2x+3|=-7$
20. $|4x+1|=10$

Respuestas

1. $c = -1$
2. $x = -3.5$
3. $x = 0$
4. $x = 2$
5. $x = -4$
6. $y = 3$
7. $x = 42$
8. $x = 2$
9. $x = 0.5$
10. $x = -2.5$
11. $x = -14$
12. todos los números
13. $x = 0$
14. sin solución
15. $x = -12$
16. $x = 3$ o $-\frac{13}{3}$
17. $x = -4$ o 14
18. $x = -2$ o 5
19. sin solución
20. $x = \frac{9}{4}$ o $-\frac{11}{4}$

Reescribir ecuaciones con más de una variable requiere los mismos movimientos “legales” que usaste para resolver una ecuación con una variable en las Lecciones 3.2.1, A.1.8, y A.1.9. El resultado final suele no ser un número sino una expresión algebraica que contiene números y variables.

Puedes ver una lista de movimientos “legales” en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 3.2.1. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material del Punto de comprobación 6A que se incluye al final del libro.

Ejemplo 1

Halla y	$3x - 2y = 6$
Resta $3x$	$-2y = -3x + 6$
Divide por -2	$y = \frac{-3x+6}{-2}$
Simplifica	$y = \frac{3}{2}x - 3$

Ejemplo 2

Halla y	$7 + 2(x + y) = 11$
Resta 7	$2(x + y) = 4$
Distribuye el 2	$2x + 2y = 4$
Resta $2x$	$2y = -2x + 4$
Divide por 2	$y = \frac{-2x+4}{2}$
Simplifica	$y = -x + 2$

Ejemplo 3

Halla x	$y = 3x - 4$
Suma 4	$y + 4 = 3x$
Divide por 3	$\frac{y+4}{3} = x$

Ejemplo 4

Halla t	$I = prt$
Divide por pr	$\frac{I}{pr} = t$

Problemas

Halla el valor de la variable especificada en cada una de las siguientes ecuaciones.

1. Halla y :
 $5x + 3y = 15$

2. Halla x :
 $5x + 3y = 15$

3. Halla w :
 $2l + 2w = P$

4. Halla m :
 $4n = 3m - 1$

5. Halla a :
 $2a + b = c$

6. Halla a :
 $b - 2a = c$

7. Halla p :
 $6 - 2(q - 3p) = 4p$

8. Halla x :
 $y = \frac{1}{4}x + 1$

9. Halla r :
 $4(r - 3s) = r - 5s$

Respuestas (Otras formas equivalentes también son posibles)

1. $y = -\frac{5}{3}x + 5$

2. $x = -\frac{3}{5}y + 3$

3. $w = -l + \frac{P}{2}$

4. $m = \frac{4n+1}{3}$

5. $a = \frac{c-b}{2}$

6. $a = \frac{c-b}{-2}$ o $\frac{b-c}{2}$

7. $p = q - 3$

8. $x = 4y - 4$

9. $r = \frac{7s}{3}$