

INTRODUCCIÓN A LAS PROGRESIONES

5.1.1 – 5.1.3

En el Capítulo 5, los alumnos investigaron progresiones buscando patrones y reglas. En la primera parte del capítulo, se concentraron en las progresiones aritméticas (progresiones generadas sumando una constante al término anterior), y más adelante (y en el Capítulo 7) analizaron progresiones geométricas (progresiones generadas multiplicando el término anterior por una constante).

En las Lecciones 5.1.1 a 5.1.3, los alumnos aprendieron a usar dos tipos de progresiones, aritméticas y geométricas, y sus gráficos, en situaciones cotidianas.

Para más ejemplos y explicaciones, consulta la próxima sección de esta *Guía para padres con práctica adicional*, “Ecuaciones de progresiones”. Para más información, consulta la primera parte del recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 5.3.2.

Ejemplo 1

Un grupo de desarrolladores de huertos está preparando un terreno para crear una gran subdivisión para casas de familia. Ya construyeron 15 casa en el sitio. Los desarrolladores planean construir seis casas nuevas al mes. Crea una tabla de valores que muestre la cantidad de casas que habrá en la subdivisión a lo largo del tiempo. Escribe una ecuación que relacione la cantidad de casas con el tiempo transcurrido. Grafica la progresión.

Ya que la subdivisión tiene inicialmente 15 casas, 15 es la cantidad de casas en el momento $t = 0$. Después de un mes habrá seis casas más, o 21 casas. Después del segundo mes, habrá 27 casas. Después de cada mes, sumamos seis casas al total de casas en la subdivisión. Ya que sumamos una cantidad constante después de cada periodo de tiempo, esta es una **progresión aritmética**.

n , cantidad de meses	$t(n)$, cantidad total de casas
0	15
1	21
2	27
3	33
4	39

Podemos hallar la ecuación de esta situación si observamos que se trata de una función lineal: el crecimiento es constante. Todas las progresiones aritméticas son lineales.

Una forma de escribir la ecuación que representa esta situación es observando que la pendiente (crecimiento) = 6 casas/mes, y el punto de corte con el eje y (punto inicial) = 15. Entonces, en forma $y = mx + b$, la ecuación es $y = 6x + 15$.

Otra forma de hallar la ecuación de una recta, especialmente en situaciones más complejas, es usando dos puntos de la recta, calculando la pendiente (m) entre los dos puntos y hallando el punto de corte con el eje y (como en la Lección 2.3.2). Este método se demuestra en los próximos pasos:

El ejemplo continúa en la página siguiente →

Continuación del ejemplo de la página anterior.

Selecciona (1, 21) y (4, 39)

$$\text{pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

$$m = \frac{39-21}{4-1}$$

$$m = \frac{18}{3}$$

$$m = 6$$

$$y = mx + b$$

$$\text{en } (x, y) = (1, 21) \text{ y } m = 6,$$

$$21 = 6(1) + b$$

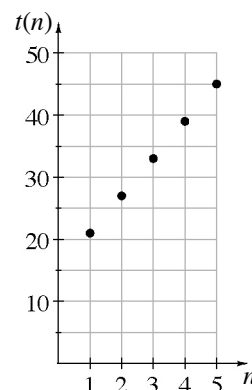
$$b = 15$$

$$y = 6x + 15$$

Escribimos la ecuación como $t(n) = 6n + 15$ para demostrar que existe una progresión aritmética (en lugar de la función lineal $y = mx + b$ o $f(x) = mx + b$) que nos permitirá hallar el término t para cualquier número n dado. En este caso, $t(n)$ representa la cantidad de casas y n la cantidad de meses.

La progresión sería: 21, 27, 33, 39, Observa que las progresiones suelen comenzar con el primer término (en este caso, el término para el primer mes, $n = 1$).

Puedes ver el gráfico de la progresión a la derecha. Observa que es lineal y que comienza con el punto (1, 21).



Ejemplo 2

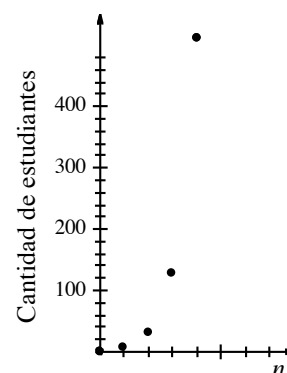
Cuando Rosa tropezó y cayó en un charco en la hora del almuerzo (¡se sintió muy avergonzada!), supo exactamente qué era lo que iba a pasar: en diez minutos, cada una de las dos chicas que la vieron caer se lo contarían a cuatro personas. En los diez minutos siguientes, esos ocho alumnos se lo dirían a cuatro personas más cada uno. Rosa sabía que esto continuaría hasta que toda la escuela estuviera hablando de su accidente. Si hay 2016 alumnos en la escuela, ¿cuántas “generaciones” de chismes se necesitarán para que todos estén hablando de Rosa? ¿Cuántos minutos se necesitarán? Grafica la situación.

En el momento $t = 0$, solos dos personas ven a Rosa tropezar y caer. Después de diez minutos, cada una de esas dos personas les habrá contado la situación a cuatro personas y habrá ocho alumnos hablando sobre Rosa. Después de otros diez minutos, cada uno de esos ocho alumnos habrá hablado con otros cuatro alumnos; habrá $8 \times 4 = 32$ alumnos hablando. Tras el tercer intervalo de diez minutos, cada uno de los 32 alumnos habrá hablado con 4 alumnos; $32 \times 4 = 128$ alumnos hablando.

En cada caso, multiplicamos la cantidad de alumnos anterior por cuatro para obtener la siguiente cantidad de alumnos. Este es un ejemplo de una **progresión geométrica**, y el multiplicador es cuatro. Podemos registrar esto en una tabla como la de la derecha, en la que n representa la cantidad de intervalos de diez minutos desde que Rosa se cayó y $t(n)$ representa la cantidad de alumnos que discuten el incidente en ese momento. Si seguimos con la tabla, veremos que en el momento $t = 6$, habrá 2048 alumnos discutiendo el accidente. Ya que solo hay 2016 alumnos en la escuela, todos sabrán lo que sucedió tras el sexto intervalo de diez minutos. Por lo tanto, poco antes de que transcurran 60 minutos, o una hora, todos sabrán que Rosa se cayó en el charco.

n , cantidad de intervalos de diez minutos	Cantidad de estudiantes
0	2
1	8
2	32
3	128
4	512
5	1024
6	2048

Puedes ver un gráfico de esta situación a la derecha. Una relación geométrica no es lineal, es exponencial. En lecciones futuras, los alumnos escribirán la progresión como 8, 32, 128, Observa que las progresiones suelen comenzar con el primer término (en este caso, el término para el primer mes es $n = 1$).



Problemas

1. Halla los términos faltantes en esta progresión aritmética y una ecuación para $t(n)$.

$$_, 15, 11, _, 3$$

2. En esta progresión, cada término es $\frac{1}{5}$ del anterior. Trabaja hacia adelante y hacia atrás para hallar los términos faltantes.

$$_, _, \frac{2}{3}, _, _$$

3. El 30° término de una progresión es 42. Si cada término de la progresión es cuatro unidades mayor que el anterior, ¿cuál es el primer término?
4. La longitud microscópica de una estructura cristalina crece de forma tal que cada día es 1.005 veces la longitud del día anterior. Si el tercer día la estructura medía 12.5 nm de largo, escribe una progresión que muestre cuánto medía los primeros cinco días (nm significa nanómetro, o 1×10^{-9} metros).
5. Davis ama conducir los automóviles en miniatura en el parque de diversiones, pero los conductores no pueden medir más de 125 cm. Si Davis medía 94 cm en su cuarto cumpleaños y crece aproximadamente 5.5 cm al año, ¿a qué edad será demasiado alto para conducir un automóvil en miniatura?

Respuestas

1. 19 y 8; $t(n) = 23 - 4n$
2. $\frac{50}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{15}, \frac{2}{75}$
3. $42 - 29(4) = -74$
4. $\approx 12.38, \approx 12.44, 12.5, \approx 12.56, \approx 12.63, \dots$
5. $t(n) = 5.5n + 94$, así que resuelve $5.5n + 94 \leq 125$. $n \approx 5.64$. Será demasiado alto cuando llegue a $\approx 4 + 5.64 = 9.64$. Davis podrá seguir conduciendo los automóviles en miniatura hasta que tenga aproximadamente $9\frac{1}{2}$ años.

ECUACIONES DE PROGRESIONES

5.2.1 – 5.2.3

En estas lecciones, los alumnos aprenderán múltiples representaciones de progresiones: listas de números, tablas, gráficos, y ecuaciones. Puedes leer más sobre la escritura de ecuaciones de progresiones en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 7.2.3.

Las ecuaciones de progresiones pueden ser escritas de forma explícita, como se explica en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 7.2.3, o como ecuaciones de recurrencia. Una fórmula explícita indica exactamente cómo hallar un término específico de una progresión. Una fórmula de recurrencia menciona el primer término (o cualquier término) y cómo pasar de ese término al siguiente. Para una explicación de las progresiones recurrentes, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 5.3.2.

Ejemplo 1

Este es el mismo caso del Ejemplo 1 de la sección anterior, *Introducción a las progresiones*.

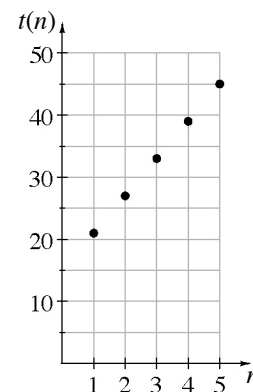
Un grupo de desarrolladores de huertos está preparando un terreno para crear una gran subdivisión para casas de familia. Ya construyeron 15 casa en el sitio. Los desarrolladores planean construir seis casas nuevas al mes. Escribe una progresión de la cantidad de casas construidas y luego una ecuación que la represente. Describe completamente un gráfico de esta progresión.

La progresión es 21, 27, 33, 39, Observa que las progresiones suelen comenzar con el primer término, donde la cantidad de meses es $n = 1$.

La diferencia común es $m = 6$, y el término cero es $b = 15$. La ecuación puede ser escrita como $t(n) = mn + b = 6n + 15$. Observa que en una progresión usamos $t(n)$ en lugar de y . $t(n)$ indica que la ecuación representa una progresión discreta y no una función continua. Los alumnos compararon progresiones y funciones en la Lección 5.3.3.

La ecuación también puede ser escrita como $a_n = 6n + 15$.

A la derecha se incluye el gráfico de esta progresión. No hay puntos de corte con los ejes x o y . No hay ningún punto en $(0, 15)$ porque las progresiones suelen escribirse comenzando con el *primer* término, donde $n = 1$. El dominio consiste de *números enteros* mayores o iguales a uno. El rango consiste de los valores de y de los puntos que siguen la regla $t(n) = 6n + 15$ cuando $n \geq 1$. No hay asíntotas. El gráfico es lineal y puede verse a la derecha. *Este gráfico es discreto* (puntos separados). (Nota: la función relacionada, $y = 6x + 15$, tendría como dominio todos los números reales (incluyendo fracciones y negativos) y el gráfico sería una recta continua con todos sus puntos conectados).



Ejemplo 2

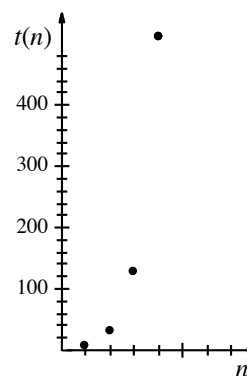
Este es el mismo caso del Ejemplo 2 de la sección anterior, *Introducción a las progresiones*.

Cuando Rosa tropezó y cayó en un charco en la hora del almuerzo (¡se sintió muy avergonzada!), supo exactamente qué era lo que iba a pasar: en diez minutos, cada una de las dos chicas que la vieron caer se lo contarían a cuatro personas. En los diez minutos siguientes, esos ocho alumnos se lo dirían a cuatro personas más cada uno. Rosa sabía que esto continuaría hasta que toda la escuela estuviera hablando de su accidente. Escribe una progresión de la cantidad de personas que sabrán sobre el accidente de Rosa después de cada intervalo de diez minutos y luego una ecuación que la represente. Describe completamente un gráfico de esta progresión.

El multiplicador es $b = 4$, y el término cero es $a = 2$. La ecuación puede escribirse como $t(n) = ab^n = 2 \cdot 4^n$. La ecuación también puede escribirse como $a_n = 2 \cdot 4^n$ (más adelante, en el Capítulo 7, los alumnos aprenderán también la notación de progresiones de “primer término”, $a_n = 8 \cdot 4^{(n-1)}$).

La progresión es: 8, 32, 128, 512, Observa que la progresión comienza con $n = 1$.

A la derecha se incluye el gráfico de esta progresión. No hay puntos de corte con los ejes x o y . No hay ningún punto en $(0, 2)$ porque las progresiones suelen escribirse comenzando con el *primer* término, donde $n = 1$. El dominio consiste en *números enteros* mayores o iguales a uno. El rango consiste en los valores de y de los puntos que siguen la regla $t(n) = 2(4)^n$ cuando $n \geq 1$. El gráfico es exponencial y puede verse a la derecha. No hay ninguna línea de simetría. Este gráfico es discreto (puntos separados). (Nota: la función relacionada, $y = 2 \cdot 4^n$, tendría como dominio todos los números reales (incluyendo fracciones y negativos) y el gráfico sería una curva con todos sus puntos conectados).



Ejemplo 3

Analiza las siguientes progresiones:

$$\begin{array}{l} \text{A: } -8, -5, -2, 1, \dots \\ \text{B: } 256, 128, 64, \dots \end{array}$$

- ¿Estas progresiones son aritméticas, geométricas, o de otro tipo? ¿Cómo lo sabes? Explícalo completamente.
- ¿Cuál es el término cero y el generador de cada progresión?
- Escribe una ecuación que represente cada progresión.
- ¿Es 378 un término de la progresión A? Justifica tu respuesta.
- ¿Es $\frac{1}{4}$ un término de la progresión B? Justifica tu respuesta.

Para determinar el tipo de progresión en los casos A y B, debemos observar cómo crece cada progresión.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{A:} & -8 & , & -5 & , & -2 & , & 1 & , & \dots \\ & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & & & \\ & +3 & & +3 & & +3 & & & & \end{array}$$

La progresión A es creada (generada) sumando tres a cada término para obtener el siguiente. Cuando cada término tiene una **diferencia común** (en este caso, “+3”) la progresión es **aritmética**.

Sin embargo, la progresión B es distinta. Los términos no tienen una diferencia común.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{B:} & 256 & , & 128 & , & 64 & , & \dots \\ & \backslash & / & \backslash & / & & & \\ & -128 & & -64 & & & & \end{array}$$

Estos términos tienen una **razón común** (multiplicador). Una progresión con una razón común es una **progresión geométrica**.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{B:} & 256 & , & 128 & , & 64 & , & \dots \\ & \backslash & / & \backslash & / & & & \\ & \cdot \frac{1}{2} & & \cdot \frac{1}{2} & & & & \end{array}$$

El primer término de la progresión A es -8 , y la progresión tiene un generador o diferencia común de $+3$. Por lo tanto, el término cero es -11 (porque $-11 + 3 = -8$). Una progresión aritmética tiene una ecuación de forma $t(n) = mn + b$ (o $a_n = mn + a_0$), donde m es la diferencia común y b el valor inicial. La ecuación de la progresión A es $t(n) = 3n - 11$, para $n = 1, 2, 3, \dots$

El ejemplo continúa en la página siguiente →

Continuación del ejemplo de la página anterior.

El primer término de la progresión B es 256, y la progresión tiene un generador o razón común de $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, el término cero es 512, porque $512 \cdot \frac{1}{2} = 256$. La ecuación general de una progresión geométrica es $t(n) = ab^n$, donde a es el término cero y b es la razón común (multiplicador). La ecuación de la progresión B es $t(n) = 512(\frac{1}{2})^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

Para saber si 378 es un término de la progresión A, podemos crear una lista de los términos de la progresión lo suficientemente larga para verificarlo, pero eso requeriría mucho tiempo. En cambio, veremos si existe un entero n que resuelva $t(n) = 3n - 11 = 378$.

$$3n - 11 = 378$$

$$3n = 389$$

$$n = \frac{389}{3} = 129 \frac{2}{3}$$

Cuando resolvemos, n no es un número entero, por lo que 378 no puede ser un término de la progresión.

De igual forma, para saber si $\frac{1}{4}$ es un término de la progresión B, tenemos que resolver $t(n) = 512(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{4}$, y buscar una solución que sea un número entero.

$$512\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{512} \cdot 512\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{512} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2048}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{11}}$$

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{11}}$$

$$n = 11$$

Si bien es probable que los alumnos nunca hayan resuelto una ecuación como esta, pueden resolver este problema realizando deducciones y comprobándolas. También pueden ver fácilmente la solución si escriben ambos lados como una potencia de 2.

Ya que la solución es un número entero, $\frac{1}{4}$ es un término de la progresión B.

Es decir, cuando $n = 11$, $t(n) = \frac{1}{4}$.

EJEMPLOS DE PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Menciona los cinco primeros términos de cada una de las siguientes progresiones aritméticas.

Ejemplo 4 (una fórmula explícita)

$$t(n) = 5n + 2$$

$$t(1) = 5(1) + 2 = 7$$

$$t(2) = 5(2) + 2 = 12$$

$$t(3) = 5(3) + 2 = 17$$

$$t(4) = 5(4) + 2 = 22$$

$$t(5) = 5(5) + 2 = 27$$

Ejemplo 5 (una fórmula de recurrencia)

$$t(1) = 3, t(n+1) = t(n) - 5$$

$$t(1) = 3$$

$$t(2) = t(1) - 5 = 3 - 5 = -2$$

$$t(3) = t(2) - 5 = -2 - 5 = -7$$

$$t(4) = t(3) - 5 = -7 - 5 = -12$$

$$t(5) = t(4) - 5 = -12 - 5 = -17$$

La progresión es: 7, 12, 17, 22, 27, ...

La progresión es: 3, -2, -7, -12, -17, ...

Ejemplo 6

Halla una fórmula explícita y una fórmula de recurrencia para la progresión: $-2, 1, 4, 7, \dots$

Explícita: $m = 3, b = -5$, así que la ecuación es: $t(n) = mn + b = 3n - 5$

De recurrencia: $t(1) = -2, t(n + 1) = t(n) + 3$

EJEMPLOS DE PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Menciona los cinco primeros términos de cada una de las siguientes progresiones geométricas.

Ejemplo 7 (una fórmula explícita)

$$t(n) = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$t(1) = 3 \cdot 2^{1-1} = 3 \cdot 2^0 = 3$$

$$t(2) = 3 \cdot 2^{2-1} = 3 \cdot 2^1 = 6$$

$$t(3) = 3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$t(4) = 3 \cdot 2^{4-1} = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$$t(5) = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 48$$

La progresión es: $3, 6, 12, 24, 48, \dots$

Ejemplo 8 (una fórmula de recurrencia)

$$t(1) = 8, t(n+1) = t(n) \cdot \frac{1}{2}$$

$$t(1) = 8$$

$$t(2) = t(1) \cdot \frac{1}{2} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$t(3) = t(2) \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$t(4) = t(3) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$t(5) = t(4) \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La progresión es: $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$

Ejemplo 9

Halla una fórmula explícita y una fórmula de recurrencia para la progresión: $81, 27, 9, 3, \dots$

Explícita: $a_1 = 81, b = \frac{1}{3}$ así que a_0 (el término cero) es hallado por $a_0 = 81 \div \frac{1}{3} = 243$ y la

ecuación es: $a_n = a_0 \cdot b^n = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, o también $t(n) = 243 \cdot \frac{1}{3}^n$

De recurrencia: $t(1) = 81, t(n+1) = t(n) \cdot \frac{1}{3}$

Problemas

Cada una de las funciones a continuación define una progresión. Menciona los cinco primeros términos de cada progresión y define si es aritmética, geométrica, ambas, o ninguna.

1. $t(n) = 5n + 2$ 2. $s_n = 3 - 8n$ 3. $u(n) = 9n - n^2$ 4. $t(n) = (-4)^n$
5. $s(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 6. $u(n) = n(n + 1)$ 7. $t(n) = 8$ 8. $s_n = \frac{3}{4}n + 1$

Indica si cada una de las progresiones a continuación es aritmética o geométrica. Luego escribe la ecuación que permite obtener los términos de la progresión.

9. 48, 24, 12, 6, 3, ... 10. -4, 3, 10, 17, 24, ... 11. 43, 39, 35, 31, 27, ...
12. $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{32}, \frac{27}{128}, \dots$ 13. 5, -5, 5, -5, 5, ... 14. 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, ...

Grafica las siguientes progresiones en el mismo grupo de ejes.

15. $t(n) = -6n + 20$ 16. 1, 4, 16, 64, ...
17. ¿Las dos progresiones de los últimos dos problemas tienen algún término en común? Explica cómo lo sabes.
18. Cada año desde 1548, la altura promedio de un hombre ha aumentado ligeramente. La nueva altura es 100.05% la altura del año anterior. Si la altura promedio de un hombre en 1548 era de 54 pulgadas, ¿cuál era la altura promedio de un hombre en 2008?
19. Davis tiene \$5.40 en su cuenta bancaria en su cuarto cumpleaños. Si sus padres añaden \$0.40 a esta cuenta todas las semanas, ¿cuándo tendrá suficiente dinero para comprar el nuevo auto de carreras Smokin' Derby que tiene un valor de \$24.99?
20. Describe completamente el gráfico de la progresión $t(n) = -4n + 18$.

Progresiones aritméticas

Menciona los cinco primeros términos de cada una de las siguientes progresiones aritméticas.

21. $t(n) = 5n - 2$

22. $t(n) = -3n + 5$

23. $t(n) = -15 + \frac{1}{2}n$

24. $t(n) = 5 + 3(n - 1)$

25. $t(1) = 5, t(n + 1) = t(n) + 3$

26. $t(1) = 5, t(n + 1) = t(n) - 3$

27. $t(1) = -3, t(n + 1) = t(n) + 6$

28. $t(1) = \frac{1}{3}, t(a + 1) = t(n) + \frac{1}{2}$

Halla el 30° término de cada una de las siguientes progresiones aritméticas.

29. $t(n) = 5n - 2$

30. $t(n) = -15 + \frac{1}{2}n$

31. $t(31) = 53, d = 5$

32. $t(1) = 25, t(n + 1) = t(n) - 3$

Halla una fórmula explícita y una fórmula de recurrencia para cada una de las siguientes progresiones aritméticas.

33. $4, 8, 12, 16, 20, \dots$

34. $-2, 5, 12, 19, 26, \dots$

35. $27, 15, 3, -9, -21, \dots$

36. $3, 3\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 4, 4\frac{1}{3}, \dots$

Las progresiones se grafican usando puntos de la forma: (número de término, valor de término). Por ejemplo, la progresión $4, 9, 16, 25, 36, \dots$ se grafica marcando los puntos $(1, 4), (2, 9), (3, 16), (4, 25), (5, 36), \dots$. Las progresiones se grafican como puntos no conectados.

37. Grafica las progresiones de los problemas 21 y 22, y halla la pendiente de cada recta.

38. ¿Cómo se relaciona la pendiente de la recta hallada en el problema anterior con la progresión?

Progresiones geométricas

Menciona los cinco primeros términos de cada una de las siguientes progresiones geométricas.

39. $t(n) = 5 \cdot 2^n$

40. $t(n) = -3 \cdot 3^n$

41. $t(n) = 40\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

42. $t(n) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

43. $t(1) = 5, t(n+1) = t(n) \cdot 3$

44. $t(1) = 100, t(n+1) = t(n) \cdot \frac{1}{2}$

45. $t(1) = -3, t(n+1) = t(n) \cdot (-2)$

46. $t(1) = \frac{1}{3}, t(n+1) = t(n) \cdot \frac{1}{2}$

Halla el 15° término de cada una de las siguientes progresiones geométricas.

47. $t(14) = 232, r = 2$

48. $t(16) = 32, r = 2$

49. $t(14) = 9, r = \frac{2}{3}$

50. $t(16) = 9, r = \frac{2}{3}$

Halla una fórmula explícita y una fórmula de recurrencia para cada una de las siguientes progresiones geométricas.

51. 2, 10, 50, 250, 1250, ...

52. 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, ...

53. 5, 15, 45, 135, 405, ...

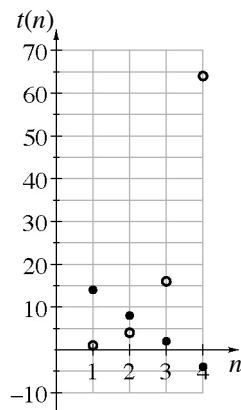
54. 3, -6, 12, -24, 48, ...

55. Grafica las progresiones de los problemas 39 y 52. Recuerda la nota incluida antes del problema 37 sobre la forma en que se grafican las progresiones.

56. ¿En qué se diferencian los gráficos de progresiones geométricas de los gráficos de progresiones aritméticas?

Respuestas

1. 7, 12, 17, 22, 27, aritmética, la diferencia común es 5.
2. -5, -13, -21, -29, -37, aritmética, la diferencia común es -8.
3. 8, 14, 18, 20, 20, ninguna
4. -4, 16, -64, 256, -1024, geométrica, la razón común es -4.
5. $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}$, geométrica, la razón común es $\frac{1}{4}$.
6. 2, 6, 12, 20, 30, ninguna.
7. 8, 8, 8, 8, 8, 8, ambas, la diferencia común es 0, la razón común es 1.
8. $\frac{7}{4}, \frac{5}{2}, \frac{13}{4}, 4, \frac{19}{4}$, aritmética, la diferencia común es $\frac{3}{4}$.
9. geométrica, $t(n) = 96\left(\frac{1}{2}\right)^n$
10. aritmética, $t(n) = 7n - 11$
11. aritmética, $t(n) = -4n + 47$
12. geométrica, $t(n) = \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n$
13. geométrica, $t(n) = -5(-1)^n$
14. geométrica, $t(n) = 100\left(\frac{1}{10}\right)^n$
15. Ver los puntos del gráfico.
16. Ver los círculos del gráfico.
17. No, no lo tienen. El gráfico es discreto, o solo puntos que son los términos de cada progresión. Ya que no comparten ningún punto común, no tienen ningún término en común.
18. En 2008, $54(1.0005)^{460} \approx 67.96$ pulgadas.
19. $t(n) = 0.4n + 5.4$, así que resuelve $0.4n + 5.4 \geq 24.99$. $n = 48.975$. En 49 semanas tendrá \$25. Si debe pagar impuestos, necesitará otras tres o cuatro semanas.
20. Esta es una función que representa una progresión aritmética, el gráfico es discreto pero los puntos son lineales. El dominio está compuesto por todos los números enteros positivos: 1, 2, 3, El rango es la progresión misma: 14, 10, 6, 2, -2, No hay asíntotas.



21. 3, 8, 13, 18, 23
22. 2, -1, -4, -7, -10
23. $-14\frac{1}{2}$, -14, $-13\frac{1}{2}$, -13, $-12\frac{1}{2}$
24. 5, 8, 11, 14, 17
25. 5, 8, 11, 14, 17
26. 5, 2, -1, -4, -7
27. -3, 3, 9, 15, 21
28. $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{5}{6}$, $2\frac{1}{3}$
29. 148
30. 0
31. 48
32. -62
33. $t(n) = 4n$; $t(1) = 4$, $t(n + 1) = t(n) + 4$
34. $t(n) = 7n - 9$; $t(1) = -2$, $t(n + 1) = t(n) + 7$
35. $t(n) = 39 - 12n$; $t(1) = 27$,
 $t(n + 1) = t(n) - 12$
36. $a_n = \frac{1}{3}n + 2\frac{2}{3}$; $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}$
37. Gráfico (21): (1, 3), (2, 8), (3, 13), (4, 18), (5, 23) pendiente = 5
Gráfico (22): (1, 2), (2, -1), (3, -4), (4, -7), (5, -10) pendiente = -3
38. La pendiente de la recta que contiene los puntos es igual a la diferencia común de la progresión.
39. 10, 20, 40, 80, 160
40. -9, -27, -81, -243, -729
41. 40, 20, 10, 5, $\frac{5}{2}$
42. 6, -3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$
43. 5, 15, 45, 135, 405
44. 100, 50, 25, $\frac{25}{2}$, $\frac{25}{4}$
45. -3, 6, -12, 24, -48
46. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{48}$
47. 464
48. 16
49. 6
50. $\frac{27}{2}$
51. $t(n) = \frac{2}{5} \cdot 5^n$; $t(1) = 2$, $t(n + 1) = t(n) \cdot 5$
52. $t(n) = 64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$; $t(1) = 16$,
 $t(n + 1) = t(n) \cdot \frac{1}{4}$
53. $t(n) = \frac{5}{3} \cdot 3^n$; $t(1) = 5$, $t(n + 1) = t(n) \cdot 3$
54. $t(n) = \frac{-3}{2} \cdot (-2)^n$; $t(1) = 3$,
 $t(n + 1) = t(n) \cdot (-2)$
55. Gráfico (39): (1, 10), (2, 20), (3, 40), (4, 80), (5, 160)
Gráfico (52): (1, 16), (2, 4), (3, 1), (4, $\frac{1}{4}$), (5, $\frac{1}{16}$)
56. Las progresiones aritméticas son lineales y las progresiones geométricas son curvas (exponenciales).

PATRONES DE CRECIMIENTO EN TABLAS Y GRÁFICOS

5.3.1

Para determinar si una función es lineal, exponencial o ninguna, observa las diferencias de los valores y para valores de x que sean enteros consecutivos. Si la diferencia es constante, el gráfico es lineal. Si la diferencia no es constante, observa el patrón de los valores de y . Si puedes usar un multiplicador constante para pasar de un valor de y al siguiente, la función es exponencial (observa que puedes usar el mismo multiplicador para pasar de diferencia a diferencia en una función exponencial).

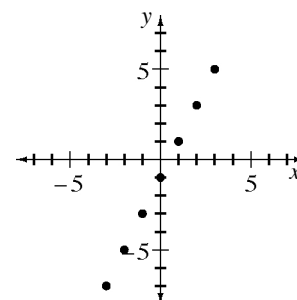
Ejemplos

Identifica la forma del gráfico en función de cada tabla.

Ejemplo 1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$
 2 2 2 2 2 2

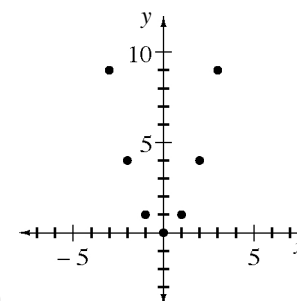


La diferencia entre valores de y es siempre dos, una constante.
La función es lineal; el gráfico a la derecha confirma esto.

Ejemplo 2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$
 -5 -3 -1 1 3 5

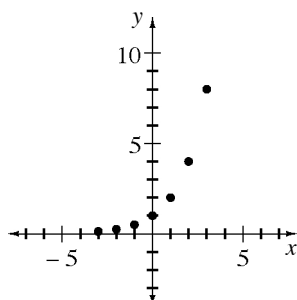


La primera diferencia entre valores de y no es constante, y no hay un multiplicador constante que permita pasar de un valor de y al siguiente.
La función no es ni lineal ni exponencial; el gráfico a la derecha confirma esto.

Ejemplo 3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$
 $\frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad 4$



Los valores de y tienen un multiplicador constante de 2 (y la diferencia entre los valores de y tiene un multiplicador constante de 2.) La función es exponencial; el gráfico a la derecha confirma esto.

Problemas

En función del crecimiento (la diferencia entre valores de y) mostrado en las tablas a continuación, identifica si el gráfico correspondiente es lineal, exponencial o ninguno de los dos.

1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	14	10	6	2	-2	-6	-10

2.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

3.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	21	12	5	0	-3	-4	-3

4.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2

5.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-14	-9	-4	1	6	11	16

6.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	-6	-2	0	2	6	18

7.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	8	16	32	64	128	256

8.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

9.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	30	20	12	6	2	0	0

10.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	11	9	7	5	3	1	-1

11.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81

12.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-27	-9	-3	0	3	9	27

13.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	5	8	9	8	5	0

14.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3	8	15

15.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1	0	-1	-2	-1	0	1

16.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$	9	18	36	72

Respuestas

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1. lineal | 2. exponencial |
| 3. ninguno | 4. lineal |
| 5. lineal | 6. ninguno |
| 7. exponencial | 8. exponencial |
| 9. ninguno | 10. lineal |
| 11. exponencial | 12. ninguno |
| 13. ninguno | 14. ninguno |
| 15. ninguno | 16. exponencial |