

En estas secciones, los alumnos generalizarán lo que han aprendido sobre las progresiones geométricas para investigar funciones exponenciales. Los alumnos estudiarán funciones exponenciales de forma $y = ab^x$ y observarán múltiples representaciones de funciones exponenciales, incluyendo gráficos, tablas, ecuaciones, y contextos. También aprenderán a pasar de una representación a otra. Los alumnos aprenderán que el valor de a es el “valor inicial” de la función— a es el punto de corte con el eje y o el valor de la función cuando $x = 0$. b es el crecimiento (multiplicador). Si $b > 1$ la función aumenta; si b es una fracción entre 0 y 1 (es decir, $0 < b < 1$), entonces la función disminuye (decae). En este curso no se toman en cuenta los valores de $b < 0$.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 7.1.3 y 7.2.3. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material de los Puntos de comprobación 9 y 10A al final del libro.

Ejemplo 1

LuAnn tiene \$500 para abrir una cuenta de ahorro. Puede abrir una cuenta en Fredrico’s Bank, que paga un interés del 7%, compuesto en forma mensual, o en Money First Bank, que paga un interés del 7.25%, compuesto en forma trimestral. LuAnn planea no tocar el dinero en la cuenta por diez años. ¿En qué banco debería depositar su dinero? Justifica tu respuesta.

Solución: la respuesta obvia es que debería depositar su dinero en el banco que pague más intereses en diez años, pero ¿cuál paga más? En ambos bancos, el capital inicial es \$500. Fredrico’s Bank paga un 7% compuesto en forma mensual, lo que significa que la tasa de interés es $\frac{0.07}{12} \approx 0.00583$ al mes. Si LuAnn deposita su dinero en Fredrico’s Bank, en un mes tendrá:

$$500 + 500(0.00583) = 500(1.00583) \approx \$502.92.$$

Para calcular la cantidad al final del segundo mes, debemos multiplicar nuevamente por 1.00583, lo que resulta en:

$$500(1.00583)^2 \approx \$505.85.$$

Después de tres meses, el saldo es:

$$500(1.00583)^3 \approx \$508.80.$$

Esto sucederá cada mes por diez años, que son 120 meses. Después de 120 meses, el saldo será:

$$500(1.00583)^{120} \approx \$1004.43.$$

Observa que esta última ecuación es una función exponencial en forma $y = ab^x$, donde y es la cantidad de dinero en la cuenta y x es la cantidad de meses (en este caso, 120 meses). $a = 500$ es el valor inicial (en 0 meses), y $b = 1.00583$ es el multiplicador o la tasa de crecimiento mensual de la cuenta.

El ejemplo continúa en la página siguiente→

Continuación del ejemplo de la página anterior.

En el caso de Money First Bank debemos realizar un cálculo similar. Este banco paga una tasa de interés mayor, 7.25%, pero solo la calcula y compone trimestralmente (es decir, cuatro veces al año o cada tres meses). Por lo tanto, cada trimestre el banco calcula un interés de $\frac{0.0725}{4} = 0.018125$. Al final del primer trimestre, LuAnn tendrá:

$$500(1.018125) \approx \$509.06.$$

Después de diez años (40 trimestres) LuAnn tendrá:

$$500(1.018125)^{40} \approx \$1025.69.$$

Observa que esta última ecuación es una función exponencial en forma $y = ab^x$, donde y es la cantidad de dinero en la cuenta y x es la cantidad de trimestres (en este caso, 40 trimestres). $a = 500$ es el valor inicial (en 0 trimestres), y $b = 1.018125$ es el multiplicador o tasa de crecimiento trimestral de la cuenta.

Ya que Money First Bank le pagaría aproximadamente \$21 más en concepto de intereses que Fredrico's Bank, debería depositar su dinero en Money First Bank.

Ejemplo 2

La mayoría de las casas aumentan de valor a tasas variables, dependiendo de su ubicación, tamaño y otros factores. Pero si una casa es alquilada, el Servicio de Impuestos Internos (IRS) permite al propietario asumir que su valor se depreciará. Supón que una casa que cuesta \$150,000 está alquilada y se deprecia a una tasa del 8% anual. ¿Cuál es el multiplicador que permite calcular cuál será el valor de la casa después de un año? ¿Cuál será el valor de la casa después de un año? ¿Cuál será su valor después de diez años? ¿Cuántos años pasarán hasta que la casa valga la mitad de su precio de compra? Dibuja un gráfico de esta situación.

Solución: a diferencia de los intereses, que aumentan un valor, la depreciación lo disminuye. Después de un año, el valor de la casa será $150000 - 0.08(150000)$, que es igual a $150000(0.92)$. Por lo tanto, el multiplicador es 0.92. Después de un año, el valor de la casa será $150000(0.92) = \$138,000$. Después de diez años, el valor será $150000(0.92)^{10} \approx \$65,158.27$.

Esta última ecuación es una función exponencial en forma $y = ab^x$, donde y es el valor de la casa y x es la cantidad de años. $a = 150000$ es el valor inicial (en 0 años), y $b = 0.92$ es el multiplicador o factor de crecimiento (en este caso, de decaimiento) anual.

Para hallar el momento en el que la casa valdrá la mitad de su precio de compra, debemos determinar en qué momento el valor de la casa será de \$75,000. Acabamos de calcular que, después de diez años, el valor de la casa será menor de \$75,000, así que esto se produce en menos de diez años. Para ayudarte a responder esta pregunta, crea una tabla con los valores de la casa para ver su depreciación.

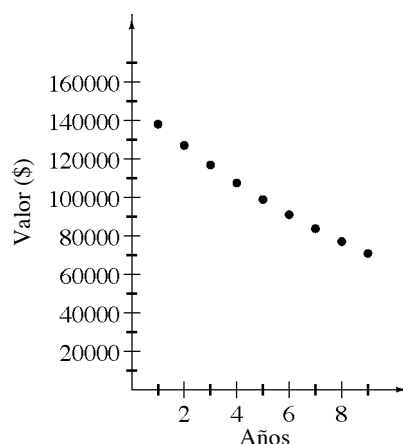
El ejemplo continúa en la página siguiente →

Continuación del ejemplo de la página anterior.

En la tabla o el gráfico podrás ver que la casa valdrá la mitad de su precio de compra después de 8 años.

Nota: puedes escribir la ecuación $75000 = 150000 \cdot 0.92^x$, pero no adquirirás el conocimiento matemático necesario para resolver esta ecuación y hallar el valor de x hasta más adelante. Sin embargo, puedes usar la ecuación para hallar un valor más exacto: intenta reemplazar x por distintos valores para que el valor de y se acerque más y más a \$75,000. Después de aproximadamente 8.313 años, el valor de la casa será cercano a \$75,000.

Años	Valor de la casa
1	138000
2	126960
3	116803.20
4	107458.94
5	98862.23
6	90953.25
7	83676.99
8	76982.83
9	70824.20



Ejemplo 3

Escribe una ecuación que represente la función descrita en la siguiente tabla;

Semana	Peso del cultivo de bacterias (g)
1	756.00
2	793.80
3	833.49

La función exponencial tendrá la forma $y = ab^x$, donde y es el peso de un cultivo de bacterias y x es la cantidad de semanas transcurridas. El multiplicador, b , del peso del cultivo de bacterias es 1.05 (porque $793.80 \div 756 = 1.05$ y $833.49 \div 793.80 = 1.05$, etc.). El punto inicial, a , no está dado, porque no sabemos cuánto pesaba el cultivo en la Semana 0. Sin embargo, ya que el peso aumenta a razón de 1.05 por semana, sabemos que $(1.05) \cdot (\text{peso en la Semana 0}) = 756.00$ g. El peso en la Semana 0 es 720 g, así que $a = 720$. Ahora podemos escribir la ecuación:

$$y = 720 \cdot 1.05^x,$$

donde y es el peso del cultivo de bacterias (g), y x es el tiempo transcurrido (semanas).

Problemas

- En siete años, el hijo de Seta, Stu, dejará su casa para ir a la universidad. Seta espera poder ahorrar \$8000 para pagar su primer año de estudios. Actualmente tiene \$5000 y encontró un banco que paga un interés del 7.75%, compuesto diariamente. A esta tasa, ¿tendrá el dinero que necesita para el primer año de estudios de Stu? De no ser así, ¿cuánto más dinero necesitará?

- Hace ocho años, Rudi pensó que realizaba una gran inversión al comprar \$1000 en acciones de Pro Sports Management. Lamentablemente, su inversión se depreció a una tasa constante del 15% anual. ¿Cuánto valen sus acciones ahora? Justifica tu respuesta.

- Halla la ecuación de las funciones exponenciales representadas en las tablas a continuación en forma $y = ab^x$.

a.

x	$f(x)$
0	1600
1	2000
2	2500
3	3125

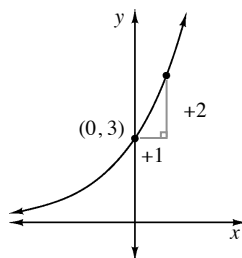
b.

x	y
1	40
2	32
3	25.6

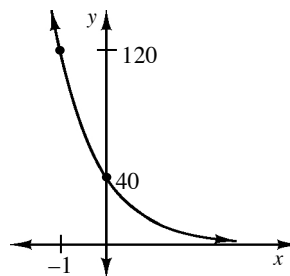
- El nuevo balón Bamo Super Ball tiene una tasa de rebote de 0.97. Si dejaras caer el balón desde una altura de 125 pies, ¿qué altura alcanzará con el décimo rebote?

- Halla la ecuación de las funciones exponenciales representadas por los gráficos a continuación en forma $y = ab^x$.

a.



b.



- Fredrico's Bank te permitirá decidir la frecuencia con la que computará tus intereses, pero con algunas restricciones. Si tus intereses son computados anualmente, serán del 8%. Si son computados trimestralmente, serán del 7.875%. Si son computados mensualmente, serán del 7.75%. Si son computados semanalmente, serán del 7.625%. Si son computados diariamente, serán del 7.5%. ¿Cuál es el mejor trato? Justifica tu respuesta.

- Investiga completamente el gráfico de la función $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 4$. Para más información sobre cómo describir completamente el gráfico de una función, consulta la sección Descripción de funciones (Lecciones 1.1.3 a 1.2.2) incluida en esta *Guía para padres con práctica adicional*.

Respuestas

1. Sí, para ese momento tendrá unos \$8601.02. La tasa diaria es $\frac{0.0775}{365} \approx 0.000212329$. Siete años son 2555 días, así que $\$5000(1.000212329)^{2555} \approx \8601.02 .
2. Ahora solo valen aproximadamente \$272.49.
3. a. $y = 1600(1.25)^x$ b. $y = 50(0.8)^x$
4. Unos 92.18 pies.
5. a. $y = 3\left(\frac{5}{3}\right)^x$ b. $y = 40\left(\frac{1}{3}\right)^x$
6. La mejor forma de resolver este problema es elegir cualquier monto y ver cómo aumenta en el curso de un año. Si tomamos \$100, después de un año, un interés del 8% compuesto en forma anual arrojará \$108. 7.875% compuesto en forma trimestral arrojará \$108.11. 7.75% compuesto en forma mensual arrojará \$108.03. 7.625% compuesto en forma semanal arrojará \$107.91. 7.5% compuesto en forma diaria arrojará \$107.79. La mejor opción es el pago de intereses compuestos en forma trimestral.
7. Esta es una función continua y no lineal (curvada). Tiene un punto de corte con el eje y en $(0, 5)$ y no tiene ningún punto de corte con el eje x . El dominio son todos los valores reales de x , y el rango son todos los valores reales de $y > 4$. Esta función tiene una asíntota horizontal en $y = 4$, y no tiene ninguna asíntota vertical. Es una función exponencial.

EXPONENTES FRACCIONARIOS

7.2.1

Un exponente fraccionario es equivalente a una expresión con raíces o radicales.

$$\text{Para } x \neq 0, x^{a/b} = (x^a)^{1/b} = \sqrt[b]{x^a} \text{ o } x^{a/b} = (x^{1/b})^a = (\sqrt[b]{x})^a.$$

Los exponentes fraccionarios también pueden ser usados para resolver ecuaciones con exponentes. Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 7.2.2.

Ejemplo 1

Reescribe las siguientes expresiones en forma de radical y simplifícalas, de ser posible.

a. $16^{5/4}$

b. $(-8)^{2/3}$

Solución:

a. $16^{5/4}$

$$= (16^{1/4})^5$$

$$= (\sqrt[4]{16})^5$$

$$= (2)^5$$

$$= 32$$

O $16^{5/4}$

$$= (16^5)^{1/4}$$

$$= (1,048,576)^{1/4}$$

$$= \sqrt[4]{1,048,576}$$

$$= 32$$

b. $(-8)^{2/3}$

$$= ((-8)^{1/3})^2$$

$$= (\sqrt[3]{-8})^2$$

$$= (-2)^2$$

$$= 4$$

O $(-8)^{2/3}$

$$= ((-8)^2)^{1/3}$$

$$= (64)^{1/3}$$

$$= \sqrt[3]{64}$$

$$= 4$$

Ejemplo 2

Simplifica las expresiones dadas a continuación. Las respuestas no deben contener paréntesis ni exponentes negativos.

a. $(144x^{-12})^{1/2}$

b. $\left(\frac{8x^7y^3}{x}\right)^{-1/3}$

Si usamos la Propiedad de potencia de los exponentes, la Propiedad de los exponentes negativos, y la Propiedad de los exponentes fraccionarios:

a. $(144x^{-12})^{1/2} = \left(\frac{144}{x^{12}}\right)^{1/2}$
 $= \sqrt{\frac{144}{x^{12}}} = \frac{12}{x^6}$

b. $\left(\frac{8x^7y^3}{x}\right)^{-1/3} = \left(\frac{x}{8x^7y^3}\right)^{1/3}$
 $= \left(\frac{1}{8x^6y^3}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{8x^6y^3}} = \frac{1}{2x^2y}$

Ejemplo 3

Resuelve las ecuaciones a continuación y halla el valor de x .

a. $x^7 = 42$

b. $3x^{12} = 132$

Solución: al igual que en muchas otras ecuaciones, debemos aislar la variable (despejarla), y luego eliminar el exponente. Esto requerirá que usemos una de las Propiedades de la potencia: $(x^a)^b = x^{ab}$.

a. $x^7 = 42$

$$(x^7)^{1/7} = (42)^{1/7}$$

$$x^{7 \cdot (1/7)} = (42)^{1/7}$$

$$x^1 = (42)^{1/7}$$

$$x \approx 1.706$$

b. $3x^{12} = 132$

$$\frac{3x^{12}}{3} = \frac{132}{3}$$

$$x^{12} = 44$$

$$(x^{12})^{1/12} = (44)^{1/12}$$

$$x = (44)^{1/12}$$

$$x \approx \pm 1.371$$

El último cálculo requiere que calculemos la raíz cuadrada de 42 en el punto (a) y la raíz duodécima de 44 en el punto (b). Observa que solo hay una respuesta para el punto (a), donde el exponente es impar, pero hay dos respuestas ($\pm$) para el punto (b), donde el exponente es par. Las raíces pares siempre producen dos respuestas, una positiva y una negativa. Si el problema es una situación del mundo real, asegúrate de que tanto el resultado positivo como el negativo tengan sentido antes de incluir ambas soluciones en tu respuesta. Tal vez debas desestimar una de las soluciones para que tu respuesta sea factible.

Problemas

Convierte las expresiones a continuación a su forma de radical y luego simplifícalas.

1. $(64)^{2/3}$

2. $16^{-1/2}$

3. $(-27)^{1/3}$

Simplifica las siguientes expresiones tanto como sea posible:

4. $(16a^8b^{12})^{3/4}$

5. $\frac{144^{1/2}x^{-3}}{(16^{3/4}x^7)^0}$

6. $\frac{a^{2/3}b^{-3/4}c^{7/8}}{a^{-1/3}b^{1/4}c^{1/8}}$

Resuelve las siguientes ecuaciones y halla el valor de x :

7. $x^8 = 65,536$

8. $-5x^{-3} = \frac{25}{40}$

9. $3^{5x} = 9^{x-1}$

10. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$

11. $2(3x - 5)^4 = 512$

12. $2^{4x-1} = 4$

Halla el error en cada una de las soluciones a continuación. Luego halla la solución correcta.

13. $4(x + 7)^6 = 1392$

$(x + 7)^6 = 348$

$x + 7 = 58$

$x = 51$

14. $5^{4x+2} = 10^{3x-1}$

$5^{4x+2} = 2 \cdot 5^{3x-1}$

$4x + 2 = 2(3x - 1)$

$4x + 2 = 6x - 1$

$3 = 2x$

$x = 1.5$

Respuestas

1. $(\sqrt[3]{64})^2 = 16$

2. $\frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$

3. $\sqrt[3]{-27} = -3$

4. $8a^6b^9$

5. $\frac{12}{x^3}$

6. $\frac{ac^{3/4}}{b}$

7. $x = 4$

8. $x = -2$

9. $x = -\frac{2}{3}$

10. $x = 0$

11. $x = 3$

12. $x = \frac{3}{4}$

13. Ambos lados deben ser elevados a $\frac{1}{6}$ (o debe calcularse su raíz sexta), no divididos por seis. $x \approx -4.35$.

14. Ya que 5 y 10 no pueden ser escritos como la potencia de un mismo número, la única forma en la que puedes resolver la ecuación por ahora es adivinando y verificando valores. $x \approx 11.75$. Si no obtuviste esta respuesta, no te preocupes. La idea del problema es que halles el error. Hay un segundo error: el 2 no fue distribuido en la cuarta línea.

Los alumnos escribirán una ecuación de forma $y = ab^x$ que atraviesa dos puntos dados (las ecuaciones de esta forma tienen una asíntota en $y = 0$.)

Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 9.3.1. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material de los Puntos de comprobación 9 y 10A.

Ejemplo 1

Halla una ecuación para una función exponencial que atraviesa los puntos $(0, 8)$ y $(4, \frac{1}{2})$.

Solución: sustituye x e y por las coordenadas de cada par de puntos en la ecuación general. Luego resuelve el sistema resultante de dos ecuaciones para hallar a y b .

$$y = ab^x$$

$$\text{Ya que } (x, y) = (0, 8)$$

$$8 = ab^0$$

$$\text{Ya que } b^0 = 1,$$

$$8 = a(1), \text{ o}$$

$$a = 8.$$

$$y = ab^x$$

$$\text{Ya que } (x, y) = (4, \frac{1}{2}),$$

$$\frac{1}{2} = ab^4$$

Si sustituimos $a = 8$ en la primera ecuación por $\frac{1}{2} = ab^4$ de la segunda ecuación,

$$\frac{1}{2} = ab^4$$

$$\text{Pero, } a = 8,$$

$$\frac{1}{2} = 8b^4$$

$$\frac{1}{16} = b^4$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{b^4}$$

$$\frac{1}{2} = b$$

Ya que hallamos los valores de a y b , ahora podemos escribir la ecuación:

$$y = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Ejemplo 2

El Club Leopardo fue presentado en Internet en el año 2000. En 2004 tenía 14,867 “leopardos” (miembros). En 2007, la población de leopardos había aumentado hasta 22,610. Modela estos datos con una función exponencial y usa el modelo para predecir cuál será la población de leopardos en 2012.

Solución: podemos llamar al año 2000 nuestro año cero, o $x = 0$. Entonces, 2004 es $x = 4$, y el año 2007 será $x = 7$. Esto nos da dos puntos de datos, (4, 14867) y (7, 22610).

Para modelar con una función exponencial, usaremos la ecuación $y = ab^x$ y substituiremos las variables por los pares coordenados para obtener un sistema de dos ecuaciones.

$$\begin{array}{ll} y = ab^x & y = ab^x \\ 14867 = ab^4 & 22610 = ab^7 \end{array}$$

A fin de usar el Método de igualación de sistemas de ecuaciones para resolver el sistema de ecuaciones, debemos reescribir ambas ecuaciones en forma “ $a =$ ”:

$$\begin{array}{ll} 14867 = ab^4 & 22610 = ab^7 \\ a = \frac{14867}{b^4} & a = \frac{22610}{b^7} \end{array}$$

Entonces, si aplicamos el Método de igualación de sistemas de ecuaciones,

$$\begin{array}{ll} \frac{14867}{b^4} = \frac{22610}{b^7} & \text{Dadas las ecuaciones anteriores,} \\ 14867b^7 = 22610b^4 & a = \frac{14867}{b^4} \\ \frac{b^7}{b^4} = \frac{22610}{14867} & \text{Ya que } b \approx 1.15, \\ b^3 = \frac{22610}{14867} & a = \frac{14867}{(1.15)^4} \\ \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{\frac{22610}{14867}} & a \approx 8500 \\ b \approx 1.15 & \end{array}$$

Ya que $a \approx 8500$ y $b \approx 1.15$ podemos escribir la ecuación: $y = 8500 \cdot 1.15^x$, donde y representa la cantidad de miembros y x representa la cantidad de años desde 2000.

Usaremos la ecuación con $x = 12$ para predecir la población en 2012.

$$\begin{array}{l} y = 8500(1.15)^x \\ y = 8500(1.15)^{12} \\ y \approx 45477 \end{array}$$

Suponiendo que la tendencia continúa hasta el año 2012 como lo ha hecho en el pasado, predecimos que la población para 2012 será de 45,477.

Problemas

Halla las ecuaciones de funciones exponenciales con asíntotas en $y = 0$ que atraviesen cada uno de los siguientes pares de puntos:

1. $(0, 6)$ y $(3, 48)$
2. $(1, 21)$ y $(2, 147)$
3. $(-1, 72.73)$ y $(3, 106.48)$
4. $(-2, 351.5625)$ y $(3, 115.2)$
5. En un frío día de invierno, la temperatura exterior alcanzó los 0°C . Karen se preparó una taza de chocolate y la llevó afuera, donde debía cortar algo de madera. Sin embargo, decidió realizar un pequeño experimento científico en lugar de beber su chocolate. Colocó un termómetro en el chocolate y lo dejó a su lado mientras trabajaba, y anotó los tiempos y lecturas del termómetro incluidos en la siguiente tabla:

Tiempo desde la primera lectura	5	10	12	15
Temperatura ($^\circ\text{C}$)	24.41°	8.51°	5.58°	2.97°

Halla la ecuación de una función exponencial de forma $y = ab^x$ que modele estos datos.

Respuestas

1. $y = 6(2)^x$
2. $y = 3(7)^x$
3. $y = 80(1.1)^x$
4. $y = 225(0.8)^x$
5. Las respuestas variarán, pero deberían ser cercanas a $y = 70(0.81)^x$.