

USO DE LA FÓRMULA CUADRÁTICA

9.1.2 y 9.1.3

Cuando una ecuación cuadrática no es factorizable, necesitas otro método para hallar x . La Fórmula cuadrática puede usarse para calcular las raíces de una función cuadrática, es decir, los puntos de corte con el eje x de la parábola. La Fórmula cuadrática puede ser usada con cualquier ecuación cuadrática, factorizable o no. Puede haber dos soluciones, una o ninguna, dependiendo de si la parábola intersecta el eje x una vez, dos o ninguna. Las soluciones a cualquier ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El símbolo $\pm$ se lee “más o menos”. Es una notación que te indica que debes calcular la fórmula dos veces, una con $+$ y una con $-$ para obtener ambos valores de x .

Para usar la fórmula, la ecuación cuadrática debe estar escrita en *forma estándar*: $ax^2 + bx + c = 0$. Esto es necesario para identificar correctamente los valores de a , b , y c . Una vez que la ecuación se halla en forma estándar y es igual a 0, a es el coeficiente del término x^2 , b es el coeficiente del término x y c es el término constante.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 9.1.1 a 9.1.4 y 10.2.4.

Ejemplo 1

Resuelve $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

Identifica a , b , y c . Presta atención a tus signos. $a = 2$, $b = -5$, $c = -3$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - (-24)}}{4}$$

Simplifica la $\sqrt{\quad}$.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

Calcula ambos valores de x .

$$x = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ o } x = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Las soluciones son $x = 3$ o $x = -\frac{1}{2}$.

Ejemplo 2

Resuelve $3x^2 + 5x + 1 = 0$.

Identifica a , b , y c .

$$a = 3, b = 5, c = 1$$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6}$$

Simplifica la $\sqrt{\quad}$.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Las soluciones son $x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \approx -0.23$ o $x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6} \approx -1.43$.

Ejemplo 3

Resuelve $25x^2 - 20x + 4 = 0$.

Identifica a , b , y c .

$$a = 25, b = -20, c = 4$$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(25)(4)}}{2(25)}$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{50}$$

Simplifica la $\sqrt{\quad}$.

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{50}$$

Esta ecuación cuadrática tiene una sola solución: $x = \frac{2}{5}$.

Ejemplo 4

Resuelve $x^2 + 4x + 10 = 0$.

Identifica a , b , y c .

$$a = 1, b = 4, c = 10$$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 40}}{2}$$

Simplifica la $\sqrt{\quad}$.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{2}$$

Calcular la raíz cuadrada de un número negativo es imposible; por lo tanto, esta ecuación cuadrática no tiene ninguna solución real.

Ejemplo 5

Resuelve $(3x + 1)(x + 2) = 1$.

Reescribe la ecuación en forma estándar.

$$(3x + 1)(x + 2) = 1$$

Es decir, reescribe el producto como suma y luego iguala la ecuación a cero.

$$3x^2 + 7x + 2 = 1$$

$$3x^2 + 7x + 1 = 0$$

Identifica a , b , y c .

$$a = 3, b = 7, c = 1$$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 12}}{6}$$

Simplifica.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Las soluciones son $x = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$, o, $x \approx -0.15$ o $x \approx -2.18$.

Ejemplo 6

Resuelve $3x^2 + 6x + 1 = 0$.

Identifica a , b , y c .

$$a = 3, b = 6, c = 1$$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 12}}{6}$$

Simplifica.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{6}$$

Las soluciones son $x = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{6}$, o, $x \approx -1.82$ o $x \approx -0.18$.

El recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 9.1.4 describe otra forma de la expresión $\frac{-6 \pm \sqrt{24}}{6}$ que puede escribirse simplificando la raíz cuadrada. El resultado es equivalente a los valores establecidos anteriormente.

Factoriza la $\sqrt{24}$ y simplifica hallando la raíz cuadrada de 4.

$$\sqrt{24} = \sqrt{4} \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Simplifica la fracción dividiendo cada término por 2.

$$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{6}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3}$$

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones usando la Fórmula cuadrática.

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. $x^2 - x - 2 = 0$ | 2. $x^2 - x - 3 = 0$ | 3. $-3x^2 + 2x + 1 = 0$ |
| 4. $-2 - 2x^2 = 4x$ | 5. $7x = 10 - 2x^2$ | 6. $-6x^2 - x + 6 = 0$ |
| 7. $6 - 4x + 3x^2 = 8$ | 8. $4x^2 + x - 1 = 0$ | 9. $x^2 - 5x + 3 = 0$ |
| 10. $0 = 10x^2 - 2x + 3$ | 11. $x(-3x + 5) = 7x - 10$ | 12. $(5x + 5)(x - 5) = 7x$ |

Respuestas

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $x = 2$ o -1 | 2. $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$
≈ 2.30 o -1.30 | 3. $x = -\frac{1}{3}$ o 1 |
| 4. $x = -1$ | 5. $x = \frac{-7 \pm \sqrt{129}}{4}$
≈ 1.09 o -4.59 | 6. $x = \frac{1 \pm \sqrt{145}}{-12}$
≈ -1.09 o 0.92 |
| 7. $x = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$
≈ 1.72 o -0.39 | 8. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$
≈ 0.39 o -0.64 | 9. $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$
≈ 4.30 o 0.70 |
| 10. no tiene solución | 11. $x = \frac{2 \pm \sqrt{124}}{-6} = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{-3}$
≈ -2.19 o 1.52 | 12. $x = \frac{27 \pm \sqrt{1229}}{10}$
≈ 6.21 o -0.81 |

RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES CON UNA VARIABLE 9.2.1 y 9.2.2

Para **resolver una desigualdad con una variable**, debes convertirla primero en una ecuación. Coloca la solución, llamada “punto frontera” en una recta numérica. Este punto separa la recta numérica en dos regiones. El punto frontera se incluye en la solución de situaciones que incluyan $\geq$ o $\leq$, y se excluye en situaciones que incluyan estrictamente $>$ o $<$. En la recta numérica, los puntos frontera incluidos en la solución son sólidos, y los que están excluidos son círculos abiertos. Luego, elige un número de cada región separada por el punto frontera y verifica si hace la desigualdad original verdadera o falsa. Si la hace verdadera, todos los números de esa región son una solución a la desigualdad. De lo contrario, ningún número de esa región es una solución.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 9.2.1 y 9.3.2.

Ejemplo 1

Resuelve: $3x - (x + 2) \geq 0$

Conviértela en una ecuación y resuélvela.

Coloca la solución (punto de frontera) en la recta numérica. Ya que $x = 1$ es una solución a la desigualdad ($\geq$), usamos un punto sólido.

Prueba un número a cada lado del punto frontera en la desigualdad original.

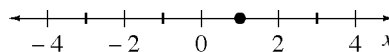
La solución es $x \geq 1$.

$$3x - (x + 2) = 0$$

$$3x - x - 2 = 0$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$



Prueba $x = 0$
 $3 \cdot 0 - (0 + 2) \geq 0$

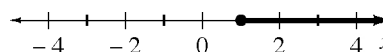
$$-2 \geq 0$$

Falso

Prueba $x = 3$
 $3 \cdot 3 - (3 + 2) \geq 0$

$$4 \geq 0$$

Verdadero



Ejemplo 2

Resuelve: $-x + 6 > x + 2$

Conviértela en una ecuación y resuélvela.

Coloca la solución (punto de frontera) en la recta numérica. Ya que el problema original es una desigualdad estricta ($>$), $x = 2$ no es una solución, y usamos un círculo abierto.

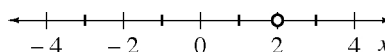
Prueba un número a cada lado del punto frontera en la desigualdad original.

La solución es $x < 2$.

$$-x + 6 = x + 2$$

$$-2x = -4$$

$$x = 2$$



Prueba $x = 0$
 $-0 + 6 > 0 + 2$

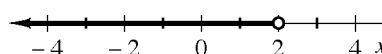
$$6 > 2$$

Verdadero

Prueba $x = 4$
 $-4 + 6 > 4 + 2$

$$2 > 6$$

Falso



Problemas

Resuelve las siguientes desigualdades:

- | | | |
|----------------------------|------------------------------------|---|
| 1. $4x - 1 \geq 7$ | 2. $2(x - 5) \leq 8$ | 3. $3 - 2x < x + 6$ |
| 4. $\frac{1}{2}x > 5$ | 5. $3(x + 4) > 12$ | 6. $2x - 7 \leq 5 - 4x$ |
| 7. $3x + 2 < 11$ | 8. $4(x - 6) \geq 20$ | 9. $\frac{1}{4}x < 2$ |
| 10. $12 - 3x > 2x + 1$ | 11. $\frac{x-5}{7} \leq -3$ | 12. $3(5 - x) \geq 7x - 1$ |
| 13. $3y - (2y + 2) \leq 7$ | 14. $\frac{m+2}{5} < \frac{2m}{3}$ | 15. $\frac{m-2}{3} \geq \frac{2m+1}{7}$ |

Respuestas

- | | | |
|------------------------|-----------------------|------------------|
| 1. $x \geq 2$ | 2. $x \leq 9$ | 3. $x > -1$ |
| 4. $x > 10$ | 5. $x > 0$ | 6. $x \leq 2$ |
| 7. $x < 3$ | 8. $x \geq 11$ | 9. $x < 8$ |
| 10. $x < \frac{11}{5}$ | 11. $x \leq -16$ | 12. $x \leq 1.6$ |
| 13. $y \leq 9$ | 14. $m > \frac{6}{7}$ | 15. $m \geq 17$ |

Para graficar la solución de una desigualdad con dos variables, primero grafica la ecuación correspondiente. Este gráfico es la recta (o curva) de frontera, ya que todos los puntos que hacen que la desigualdad sea verdadera se encuentran a un lado u otro de la recta. Antes de graficar la ecuación, decide si la recta o la curva es parte de la solución o no, es decir, si debe ser continua o punteada. Si el símbolo de desigualdad es $\leq$ o $\geq$, la recta de frontera es parte de la desigualdad y debe ser continua. Si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$, la recta de frontera es punteada.

Luego, decide qué lado de la recta de frontera se debe sombrear para mostrar la parte del gráfico que representa todos los valores que hacen verdadera la desigualdad. Elige un punto que no se halle en la recta de frontera. Coloca este punto en la desigualdad *original*. Si la desigualdad es verdadera para el punto probado, sombrea el gráfico de ese lado de la recta de frontera. Si la desigualdad es falsa para el punto probado, sombrea el lado opuesto.

La porción sombreada representa todas las soluciones a la desigualdad original.

Cuidado: si debes modificar la desigualdad para graficarla, por ejemplo, convirtiéndola a su forma pendiente-ordenada al origen, usa siempre la desigualdad *original* para probar un punto, no la forma modificada.

Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 9.4.1.

Ejemplo 1

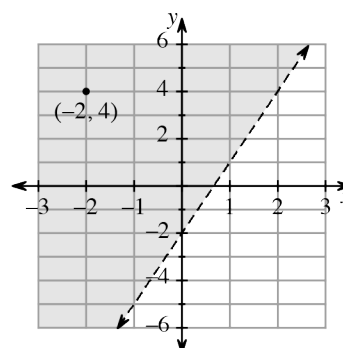
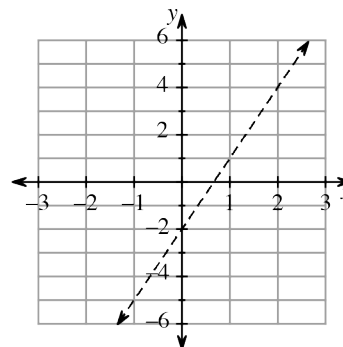
Grafica las soluciones de la desigualdad $y > 3x - 2$.

Primero, grafica la recta $y = 3x - 2$ pero dibújala punteada, ya que el uso del signo $>$ significa que la recta de frontera no es parte de la solución. Por ejemplo, el punto $(0, -2)$ es parte de la recta de frontera, pero no es una solución a la desigualdad porque $-2 \not> 3(0) - 2$ o $-2 \not> -2$.

Luego, prueba un punto que no sea parte de la recta de frontera. Para este ejemplo, usa el punto $(-2, 4)$.

$4 > 3(-2) - 2$, así que $4 > -8$, que es un enunciado verdadero.

Ya que la desigualdad es verdadera para este punto de prueba, sombrea la región que contiene el punto $(-2, 4)$. Todos los pares coordinados que son una solución se encuentran en la región sombreada.



Ejemplo 2

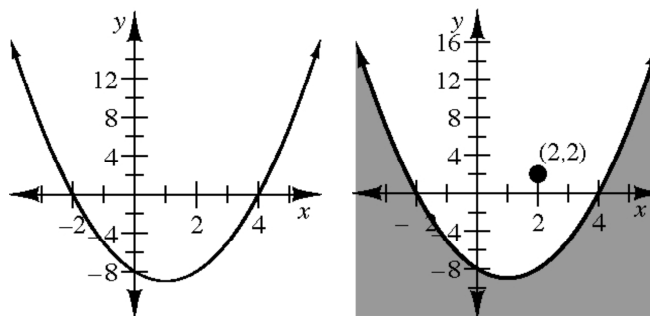
Grafica las soluciones de la desigualdad $y \leq x^2 - 2x - 8$

Primero, grafica la parábola $y = x^2 - 2x - 8$ en forma continua, ya que $\leq$ significa que la curva de frontera es parte de la solución.

Luego, prueba el punto $(2, 2)$ por encima de la curva de frontera.

$$2 \leq 2^2 - 2 \cdot 2 - 8, \text{ así que } 2 \leq -8$$

Ya que la desigualdad es falsa para este punto de prueba por encima de la recta, sombrea la región debajo de la curva. Las soluciones se encuentran en la región sombreada.



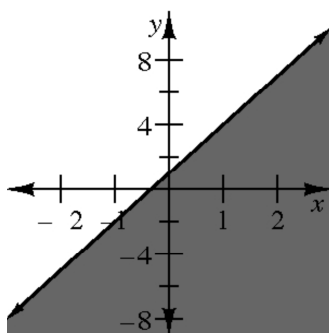
Problemas

Grafica las soluciones a las siguientes desigualdades en distintos grupos de ejes.

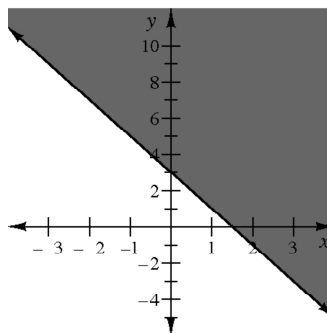
- | | | |
|---------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1. $y \leq 3x + 1$ | 2. $y \geq -2x + 3$ | 3. $y > 4x - 2$ |
| 4. $y < -3x - 5$ | 5. $y \leq 3$ | 6. $x > 1$ |
| 7. $y > \frac{2}{3}x + 8$ | 8. $y < -\frac{3}{5}x - 7$ | 9. $3x + 2y \geq 7$ |
| 10. $-4x + 2y < 3$ | 11. $y \geq x^2 - 3$ | 12. $y \leq x^2 + 2x$ |
| 13. $y < 4 - x^2$ | 14. $y \leq x + 2 $ | 15. $y \geq - x + 3$ |

Respuestas

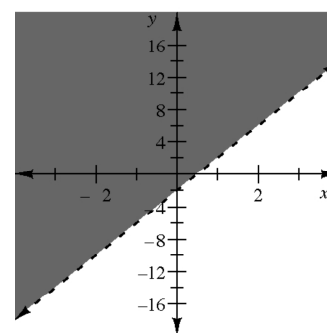
1.



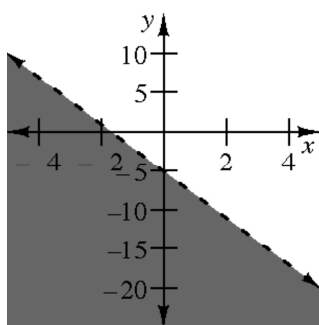
2.



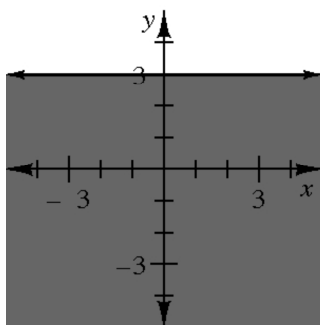
3.



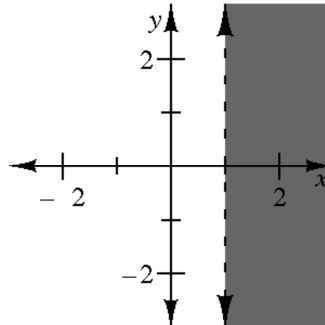
4.



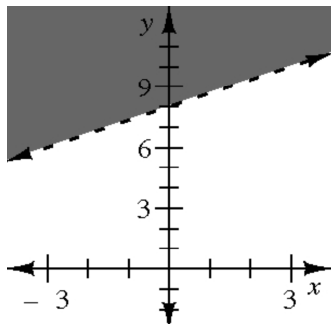
5.



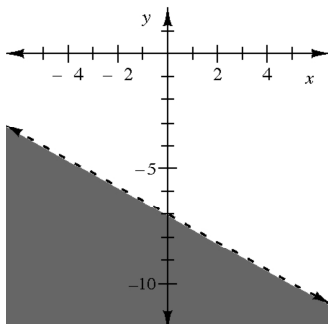
6.



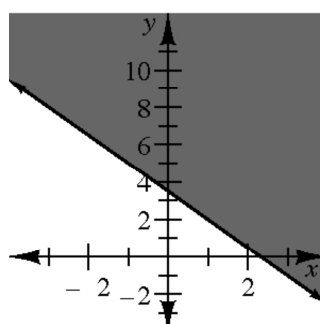
7.



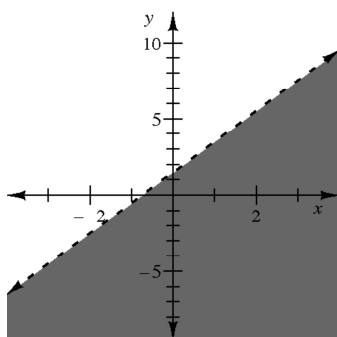
8.



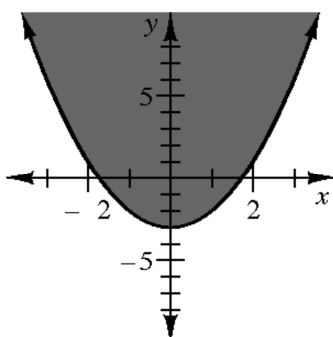
9.



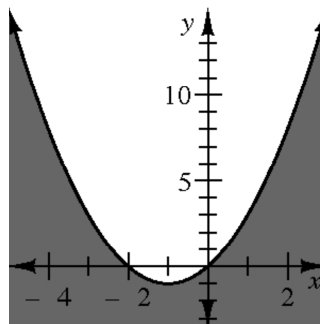
10.



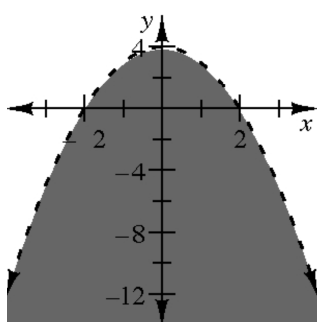
11.



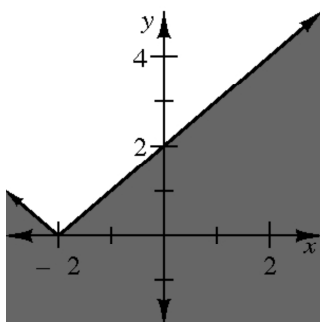
12.



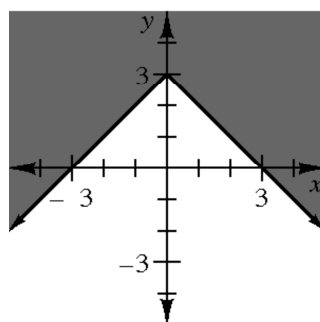
13.



14.



15.



SISTEMAS DE DESIGUALDADES

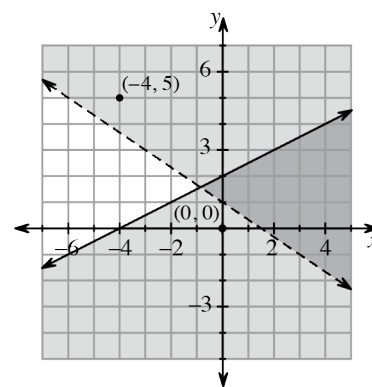
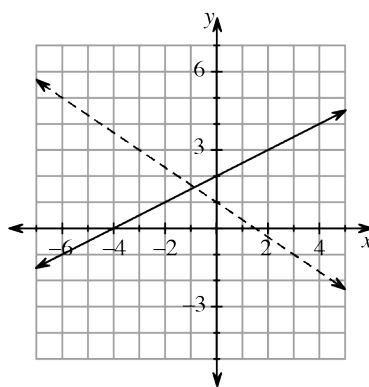
9.4.1 – 9.4.3

Para **graficar las soluciones a un sistema de desigualdades**, sigue los mismos pasos detallados en la sección anterior pero hazlo dos veces—una para cada desigualdad. La solución al sistema de desigualdades es la sección en la que las regiones sombreadas de los gráficos de ambas desigualdades se **superponen**.

Ejemplo 1

Grafica las soluciones al sistema $y \leq \frac{1}{2}x + 2$ e $y > -\frac{2}{3}x + 1$.

Grafica las rectas $y = \frac{1}{2}x + 2$ e $y = -\frac{2}{3}x + 1$. La primera es continua y la segunda es punteada. Prueba el punto $(-4, 5)$ en la primera desigualdad.



$$5 \leq \frac{1}{2}(-4) + 2, \text{ entonces } 5 \leq 0$$

Esta desigualdad es falsa, así que sombrea el lado de la recta de frontera opuesto a $(-4, 5)$, es decir, la sección debajo de la recta.

$$5 > -\frac{2}{3}(-4) + 1, \text{ entonces } 5 > \frac{11}{3}$$

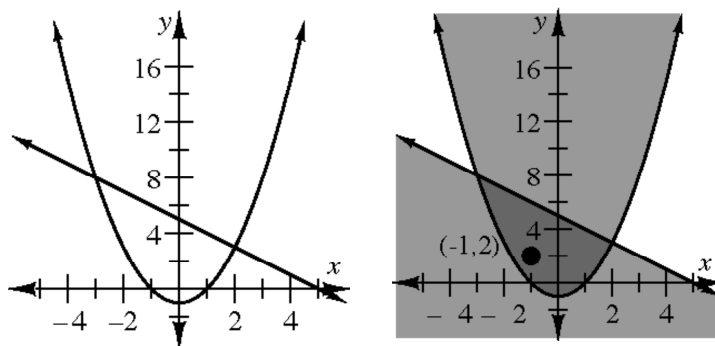
Prueba el mismo punto en la segunda desigualdad. Esta desigualdad es verdadera, así que sombrea el mismo lado de la recta de frontera en el que se encuentra $(-4, 5)$, es decir, por encima de la recta.

Las soluciones son representadas por la sección en la que se superponen las dos regiones sombreadas, indicada con el tono de gris más oscuro en el gráfico de arriba a la derecha.

Ejemplo 2

Grafica las soluciones al sistema $y \leq -x + 5$ e $y \geq x^2 - 1$.

Grafica la recta $y = -x + 5$ y la parábola $y = x^2 - 1$, ambas en forma continua.



$$2 \leq -(-1) + 5, \text{ entonces } 2 \leq 6$$

Prueba el punto $(-1, 2)$ en la primera desigualdad. Esta desigualdad es verdadera, así que sombrea el lado de la recta de frontera en el que se encuentra $(-1, 2)$, es decir, debajo de la recta.

$$2 \geq (-1)^2 - 1, \text{ entonces } 2 \geq 0$$

Prueba el mismo punto en la segunda desigualdad. Esta desigualdad también es verdadera, así que sombrea el lado de la curva de frontera en el que se encuentra $(-1, 2)$, es decir, el interior de la curva.

Las soluciones son representadas por la sección en la que se superponen las dos regiones sombreadas, indicada con el tono de gris más oscuro en el gráfico de arriba a la derecha.

Problemas

Grafica las soluciones a los siguientes pares de desigualdades en los mismos grupos de ejes:

1. $y > 3x - 4$ e $y \leq -2x + 5$

2. $y \geq -3x - 6$ e $y > 4x - 4$

3. $y < -\frac{3}{5}x + 4$ e $y < \frac{1}{3}x + 3$

4. $y < -\frac{3}{7}x - 1$ e $y > \frac{4}{5}x + 1$

5. $y < 3$ e $y > \frac{1}{2}x + 2$

6. $x \leq 3$ e $y < \frac{3}{4}x - 4$

7. $y \leq 2x + 1$ e $y \geq x^2 - 4$

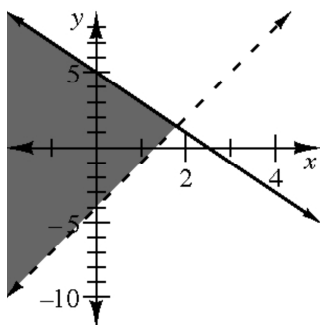
8. $y < -x + 5$ e $y \geq x^2 + 1$

9. $y < -x + 6$ e $y \geq |x - 2|$

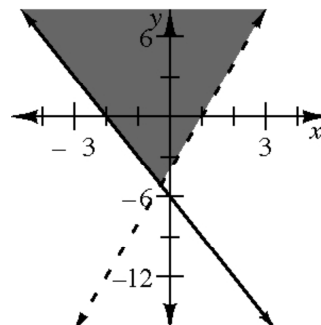
10. $y < -x^2 + 5$ e $y \geq |x| - 1$

Respuestas

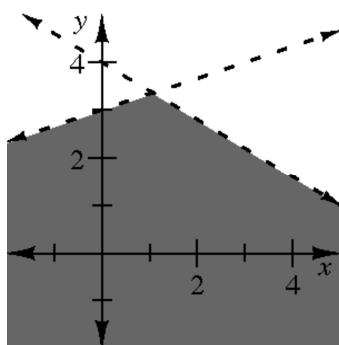
1.



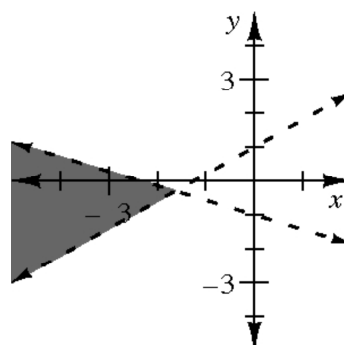
2.



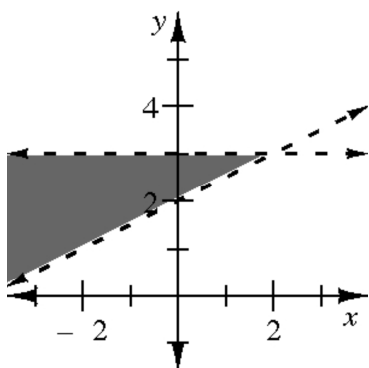
3.



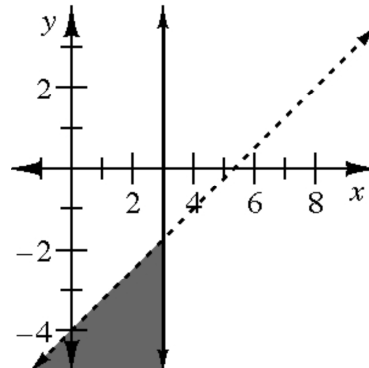
4.



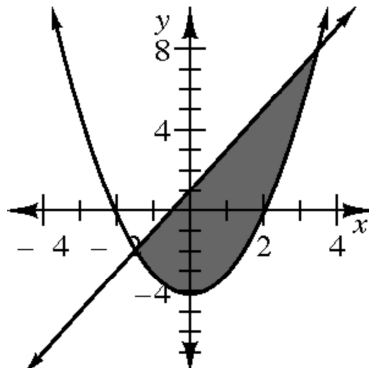
5.



6.



7.



8.

