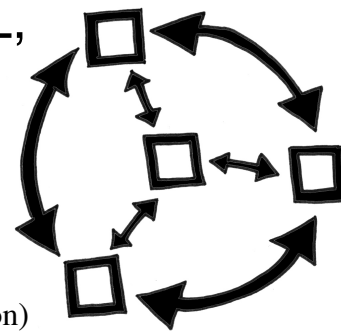


CORE CONNECTIONS EN ESPAÑOL, ÁLGEBRA

Guía para padres con práctica adicional



Editores en jefe / Autores

Evra Baldinger (Primera edición)
Universidad de California, Berkeley
Berkeley, CA

Leslie Dietiker (Primera edición)
Universidad de Boston
Boston, MA

Michael Kassarian (Segunda edición)
Programa Educativo CPM
Kensington, CA

Coautores que realizaron aportes

Bev Brockhoff
Escuela Media Glen Edwards
Lincoln, CA

Elizabeth Coyner
Programa Educativo CPM
Sacramento, CA

Brian Hoey
Programa Educativo CPM
Sacramento, CA

Pat King
Secundaria Oliver Wendell Holmes
Davis, CA

Bob Petersen
Secundaria Rosemont
Sacramento, CA

Asistentes técnicos

Rebecca Harlow

Sarah Maile

Aubrie Maize

Directores de programa

Elizabeth Coyner
Programa Educativo CPM Sacramento, CA

Lori Hamada
Programa Educativo CPM
Fresno, CA

Brian Hoey
Programa Educativo CPM
Sacramento, CA

Judy Kysh, Ph.D.
Departamentos de Educación y
Matemáticas, Universidad
Estatal de San Francisco, CA

Tom Sallee, Ph.D.
Departamento de Matemáticas
Universidad de California, Davis

Basado en *Algebra Connections Parent Guide* © 2006
y *Algebra Connections Extra Practice* © 2008

Autores que realizaron aportes

Carlos Cabana
David Guilick
Bob Peterson
Michael Titelbaum

John Cooper
Patricia King
Ward Quincey

Joanne da Luz
Lara Lomac
Barbara Shreve

Asistentes técnicos

Erica Andrews
Carrie Cai
Michael Leong

Eric Baxter
Elizabeth Fong

Elizabeth Burke
Keith Lee

Copyright © 2006, 2013, 2016 del Programa Educativo CPM. Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción o transmisión total o parcial de esta publicación de cualquier forma y por cualquier medio, electrónico o mecánico, incluidas fotocopia, grabación o cualquier otro sistema de almacenamiento o recuperación de la información sin la autorización escrita del editor. Las solicitudes de autorización deberán dirigirse por escrito a: CPM Educational Program, 9498 Little Rapids Way, Elk Grove, CA, 95758. Correo electrónico: cpm@cpm.org.

Tabla de contenidos

Capítulo 1 Funciones

Descripción de funciones	1
Funciones	4

Capítulo 2 Relaciones lineales

Pendiente—medida de la inclinación	8
Cómo escribir una ecuación a partir de la pendiente y un punto en la recta	11
Cómo escribir la ecuación de una recta a partir de dos puntos	13

Capítulo 3 Simplificar y resolver

Propiedades de la potencia	15
Ecuaciones $\leftrightarrow$ Azulejos algebraicos	17
Multiplicación de binomios	18
Resolución de ecuaciones con multiplicación o valores absolutos	20
Reescribir ecuaciones con múltiples variables	22

Capítulo 4 Sistemas de ecuaciones

Escribir ecuaciones	24
Resolución de sistemas por sustitución	28
Método de eliminación	33

Capítulo 5 Progresiones

Introducción a las progresiones	37
Ecuaciones de progresiones	41
Patrones de crecimiento en tablas y gráficos	51

Capítulo 6 Modelos de datos con dos variables

Recta de mejor ajuste	54
Valores residuales y cotas superiores e inferiores	58
Línea de regresión de mínimos cuadrados	63
Diagramas de valor residual y correlación	67
Asociación y causalidad	72
Modelos de mejor ajuste curvos	74

Capítulo 7 Funciones exponenciales

Funciones exponenciales	78
Exponentes fraccionarios	83
Curva de ajuste	86

Capítulo 8 Funciones cuadráticas

Factorización de expresiones cuadráticas	89
Atajos de factorización	93
Uso de la Propiedad de producto cero	95
Forma de graficación y completar cuadrados	98

Capítulo 9 Resolución de ecuaciones cuadráticas y desigualdades

Uso de la Fórmula cuadrática	101
Resolución de desigualdades con una variable	106
Graficar desigualdades con dos variables	108
Sistemas de desigualdades	111

Capítulo 10 Resolución de ecuaciones complejas

Asociación en una tabla de doble entrada	115
Resolver reescribiendo: El Método de Rompe fracciones	118
Múltiples métodos de resolución de ecuaciones	120
Puntos de corte e intersecciones	122
Resolver desigualdades cuadráticas y con valores absolutos	124

Capítulo 11 Funciones y datos

Transformaciones de funciones	128
Comparación y representación de datos	130

Apéndice Representación de expresiones

Agrupación de términos semejantes	136
Simplificación de expresiones algebraicas	139
Comparación de expresiones algebraicas	142
Resolución de ecuaciones	147

DESCRIPCIÓN DE FUNCIONES**1.1.3 – 1.2.2**

Además de introducir a los alumnos a las normas de clase relativas al aprendizaje basado en los problemas, el objetivo principal de estas lecciones consiste en que los alumnos puedan describir totalmente los elementos esenciales del gráfico de una función. Para describir el gráfico de una función en su totalidad, los alumnos deben responder las siguientes preguntas para investigación de gráficos:

Pregunta para investigación de gráficos	Ejemplo de enunciado sintético
¿Cómo describirías el gráfico?	<i>El gráfico parece una media parábola de costado.</i>
¿El gráfico va en aumento o en disminución (viéndolo de izquierda a derecha)?	<i>A medida que x aumenta, y aumenta.</i>
¿Cuáles son los puntos de corte con el eje x y el eje y ?	<i>Los puntos de corte del gráfico con los ejes x e y están en $(0, 0)$.</i>
¿Existen limitaciones respecto de los valores de entrada (dominio) de la ecuación?	<i>Solo son posibles valores positivos de x y cero.</i>
¿Existen limitaciones respecto de los valores de salida (rango) de la ecuación? (¿Existe un valor máximo o mínimo de y ?)	<i>El valor más pequeño de y es 0. No hay un valor máximo de y.</i>
¿Existe algún punto especial?	<i>El gráfico tiene un punto “inicial” en $(0, 0)$.</i>
¿El gráfico tiene alguna simetría? De ser así, ¿dónde está?	<i>Este gráfico no presenta simetrías.</i>

Los conceptos más formales de función, dominio, y rango se abordan en las Lecciones 1.2.4 y 1.2.5.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 1.1.1, 1.1.2, y 1.1.3. Las respuestas de los alumnos al Registro de aprendizaje de la Lección 1.1.1 (problema 1-32), si les fue asignado, también pueden ser de utilidad.

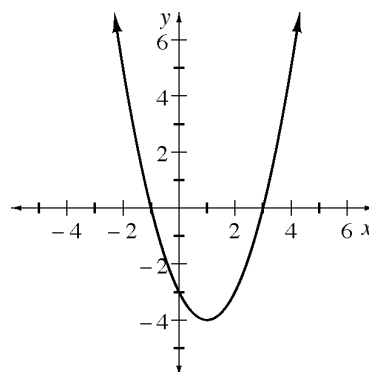
Ejemplo 1

Para la función $y = x^2 - 2x - 3$, realiza una tabla $x \rightarrow y$, dibuja un gráfico, y describe completamente sus características.

En este punto no hay forma de saber cuántos puntos son suficientes para la tabla $x \rightarrow y$. Agrega más puntos según sea necesario y hasta que estés seguro de la forma y ubicación.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0

Ten cuidado con la sustitución y el Orden de las operaciones al calcular los valores. Por ejemplo, si $x = -2$,
 $y = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$.



El gráfico es una parábola abierta arriba. Los puntos de corte con el eje x son $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. El punto de corte con el eje y es $(0, -3)$. De izquierda a derecha, el gráfico disminuye hasta $x = 1$ y luego aumenta. El punto mínimo (más bajo) del gráfico (denominado vértice) es $(1, -4)$. La línea recta vertical $x = 1$ es una línea de simetría. No hay limitaciones respecto de los valores de entrada de la función. Los valores de salida pueden ser valores mayores o iguales a -4 .

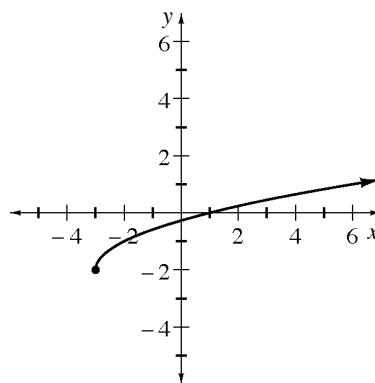
Ejemplo 2

Para la función $y = \sqrt{x+3} - 2$, realiza una tabla $x \rightarrow y$, dibuja un gráfico, y describe sus características.

Observa que el número más pequeño posible para la tabla $x \rightarrow y$ es $x = -3$. Cualquier otro valor más pequeño requerirá la raíz cuadrada de un negativo, que no es un número real.

x	-4	-3	0	1	3	6
y		-2	-0.3	0	0.4	1

El gráfico representa la mitad de una parábola. Comienza en $(-3, -2)$, el punto de corte con el eje x es $(1, 0)$, y el punto de corte con el eje y es $(0, \approx -0.3)$. El gráfico aumenta de izquierda a derecha. Los valores de entrada se limitan a -3 o valores mayores, y los valores de salida se limitan a -2 o valores mayores. No hay una línea de simetría.



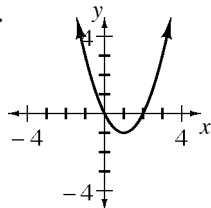
Problemas

Para cada función, realiza una tabla $x \rightarrow y$, dibuja un gráfico, y describe sus características.

- | | | |
|------------------------|-----------------------|---------------------------|
| 1. $y = x^2 - 2x$ | 2. $y = x^2 + 2x - 3$ | 3. $y = \sqrt{x-2}$ |
| 4. $y = 4 - x^2$ | 5. $y = x^2 + 2x + 1$ | 6. $y = -\sqrt{x} + 3$ |
| 7. $y = -x^2 + 2x - 1$ | 8. $y = x+2 $ | 9. $y = 2\sqrt[3]{x} - 1$ |

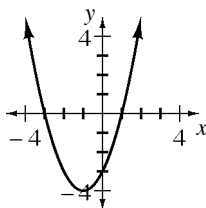
Respuestas

1.



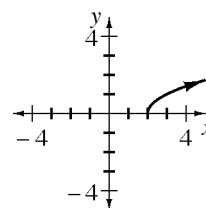
Parábola; puntos de corte $(0, 0)$, $(2, 0)$; decreciente hasta $x = 1$ luego creciente; valor mínimo en $(1, -1)$; $x = 1$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son mayores o iguales a -1 .

2.



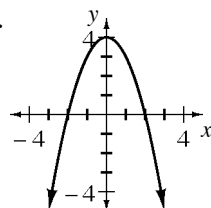
Parábola; puntos de corte $(-3, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, -3)$; decreciente hasta $x = -1$, luego creciente; valor mínimo en $(-1, -4)$; $x = -1$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son mayores o iguales a -4 .

3.



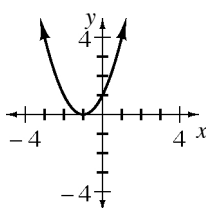
Media parábola; punto inicial, punto de corte y punto mínimo $(2, 0)$; creciente para $x > 2$. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número mayor o igual a 2. Los valores de salida son mayores o iguales a 0.

4.



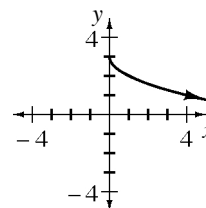
Parábola; puntos de corte $(-2, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 4)$; creciente para $x < 0$, decreciente para $x > 0$; valor máximo en $(0, 4)$; $x = 0$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son menores o iguales a 4.

5.



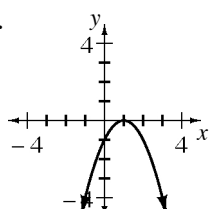
Parábola; punto de corte $(-1, 0)$; decreciente para $x < -1$, creciente para $x > -1$; valor mínimo en $(-1, 0)$; $x = -1$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son mayores o iguales a 0.

6.



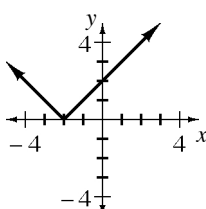
Media parábola; punto inicial, punto de corte y punto máximo $(0, 3)$; decreciente para $x > 0$. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número mayor o igual a 0. Los valores de salida son menores o iguales a 3.

7.



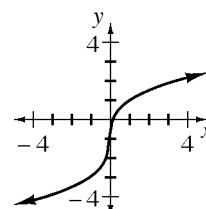
Parábola; puntos de corte $(1, 0)$ y $(0, -1)$; creciente para $x < 1$, decreciente para $x > 1$; valor máximo en $(1, 0)$; $x = 1$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son menores o iguales a 0.

8.



Forma de "V"; puntos de corte $(-2, 0)$ and $(0, 2)$; decreciente para $x < -2$, creciente para $x > -2$; valor mínimo en $(-2, 0)$; $x = -2$ es una línea de simetría. Los valores de entrada pueden estar conformados por cualquier número real. Los valores de salida son mayores o iguales a 0.

9.



Forma de "S"; puntos de corte $(0, -1)$ and $(0.125, 0)$; creciente para todos los valores de x de izquierda a derecha. Los valores de entrada y de salida pueden estar conformados por cualquier número real. No hay una línea de simetría.

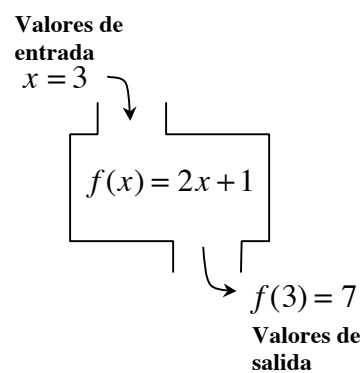
La relación entre los valores de entrada (generalmente x) y los valores de salida (generalmente y) se denomina función si por cada valor de entrada hay solamente un valor de salida. Las funciones pueden representarse mediante la ilustración de una “máquina” de entrada–salida, como se muestra en la Lección 1.2.3 del libro de texto y en el diagrama del Ejemplo 1 a continuación.

El conjunto de todos los posibles valores de entrada de una relación se denomina **dominio**, mientras que el conjunto de todos los posibles valores de salida de una relación se denomina **rango**.

Para obtener información adicional sobre funciones, notación de funciones y dominio y rango, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 1.2.5.

Ejemplo 1

Los números, representados por una letra o símbolo como x , se ingresan a la máquina de funciones denominada f de a uno a la vez, y luego la función realiza la operación sobre cada valor de entrada para determinar cada valor de salida, $f(x)$. Por ejemplo, cuando $x = 3$ se coloca en la función f de la derecha, la máquina multiplica 3 por 2 y suma 1 para obtener el valor de salida, $f(x)$ que es 7. La notación $f(3) = 7$ indica que la función denominada f conecta el valor de entrada $x = 3$ con el valor de salida 7. Esto también significa que el punto $(3, 7)$ se ubica en el gráfico de la función.



Ejemplo 2

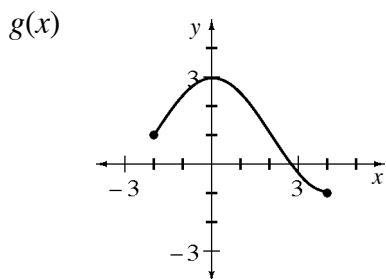
a. Si $f(x) = \sqrt{x-2}$ entonces $f(11) = ?$ $f(11) = \sqrt{11-2} = \sqrt{9} = 3$

b. Si $g(x) = 3 - x^2$ entonces $g(5) = ?$ $g(5) = 3 - (5)^2 = 3 - 25 = -22$

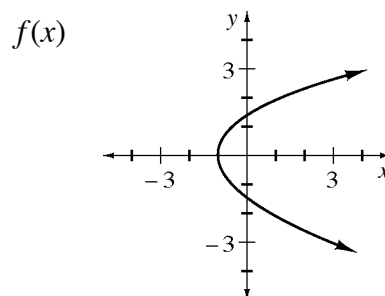
c. Si $f(x) = \frac{x+3}{2x-5}$ entonces $f(2) = ?$ $f(2) = \frac{2+3}{2 \cdot 2 - 5} = \frac{5}{-1} = -5$

Ejemplo 3

Una relación en la que cada valor de entrada tiene solo un valor de salida recibe el nombre de **función**.



$g(x)$ es una función: cada valor de entrada (x) tiene solo un valor de salida (y).
 $g(-2) = 1$, $g(0) = 3$, $g(4) = -1$, y así sucesivamente.



$f(x)$ no es una función: cada valor de entrada mayor de -1 está asociado a dos valores de y . $f(1) = 2$ y $f(1) = -2$.

Ejemplo 4

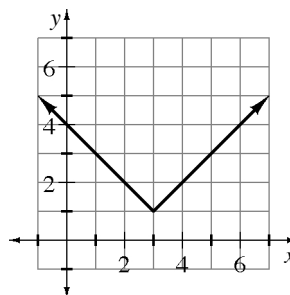
El conjunto de todos los posibles valores de entrada de una relación se denomina **dominio**, mientras que el conjunto de todos los posibles valores de salida de una relación se conoce como **rango**.

En el Ejemplo 3 anterior, el dominio de $g(x)$ es $-2 \leq x \leq 4$, o “todos los números entre -2 y 4 ”. El rango es $-1 \leq y \leq 3$ o “todos los números entre -1 y 3 ”.

El dominio de $f(x)$ en el Ejemplo 3 anterior es $x \geq -1$ o “cualquier número real mayor o igual a -1 ”, dado que el gráfico comienza en -1 y continúa siempre hacia la derecha. Dado que el gráfico de $f(x)$ se extiende siempre hacia las direcciones positivas y negativas de y , el rango consiste en “todos los números reales”.

Ejemplo 5

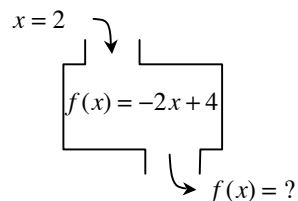
Para el gráfico de la derecha, dado que los valores de x se extienden siempre en ambas direcciones, el dominio está formado por “todos los números reales”. Los valores de y comienzan en 1 y ascienden de forma tal que el rango es $y \geq 1$ o “todos los números mayores o iguales a 1 ”.



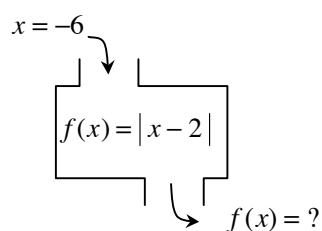
Problemas

Determina los valores de entrada para los valores de salida dados de las siguientes funciones.

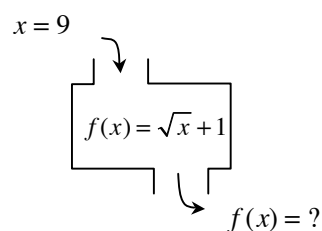
1.



2.



3.



4. $f(x) = (5 - x)^2$
 $f(8) = ?$

5. $g(x) = x^2 - 5$
 $g(-3) = ?$

6. $f(x) = \frac{2x+7}{x^2-9}$
 $f(3) = ?$

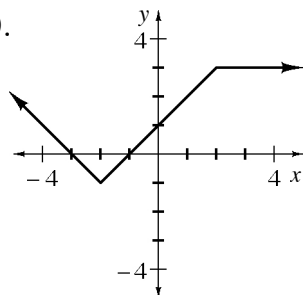
7. $h(x) = 5 - \sqrt{x}$
 $h(9) = ?$

8. $h(x) = \sqrt{5 - x}$
 $h(9) = ?$

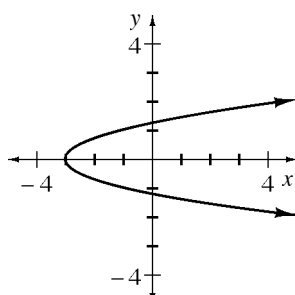
9. $f(x) = -x^2$
 $f(4) = ?$

Determina si cada una de las siguientes relaciones es una función. Luego indica su dominio y rango.

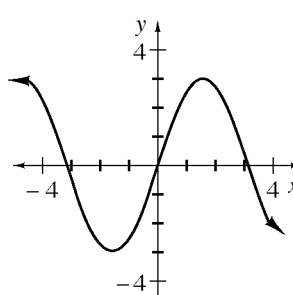
10.



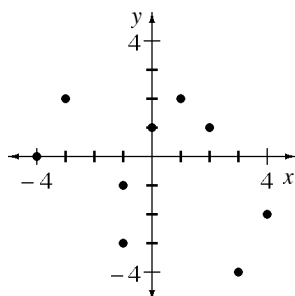
11.



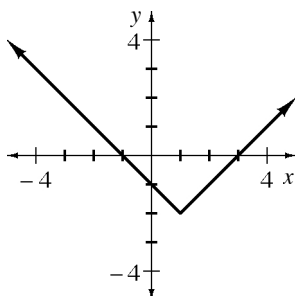
12.



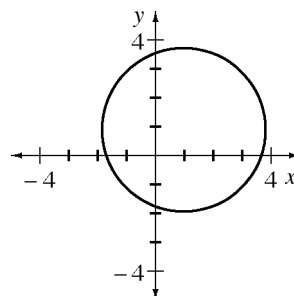
13.



14.



15.



Respuestas

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $f(2) = 0$ | 2. $f(-6) = 8$ | 3. $f(9) = 4$ |
| 4. $f(8) = 9$ | 5. $g(-3) = 4$ | 6. no es posible |
| 7. $f(9) = 2$ | 8. no es posible | 9. $f(4) = -16$ |
| 10. Sí, cada valor de entrada tiene un valor de salida; el dominio está compuesto por todos los números, el rango es $-1 \leq y \leq 3$ | 11. No, por ejemplo $x = 0$ tiene dos valores de salida; el dominio es $x \geq -3$, el rango está compuesto por todos los números | 12. Sí; el dominio está compuesto por todos los números, el rango es $-3 \leq y \leq 3$ |
| 13. No; $x = -1$ tiene dos valores de salida; el dominio es $-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, el rango es $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ | 14. Sí; el dominio está compuesto por todos los números, el rango es $y \geq -2$ | 15. No, varios valores de entrada tienen dos valores de salida; el dominio es $-2 \leq x \leq 4$ y el rango es $-2 \leq y \leq 4$ |

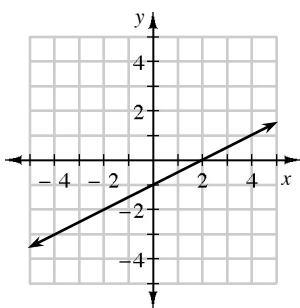
Los alumnos utilizaron la ecuación $y = mx + b$ para graficar rectas y describir patrones en los cursos anteriores. La Lección 2.1.1 es un repaso. Cuando la ecuación de una recta se escribe en la forma $y = mx + b$, el coeficiente m representa la pendiente de la recta. La pendiente representa la dirección de la recta y su inclinación. La constante b es el punto de corte con el eje y , que se escribe $(0, b)$, e indica dónde se cruza la recta con el eje y .

Para más información sobre pendiente, consulta la recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 2.1.4.

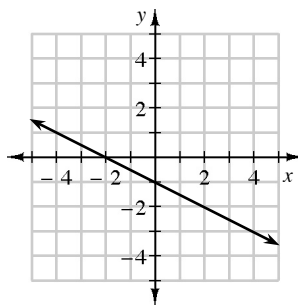
Ejemplo 1

Si m es positivo, la recta sube de izquierda a derecha. Si m es negativo, la recta baja de izquierda a derecha. Si $m = 0$ entonces la recta es horizontal. El valor de b indica el punto de corte con el eje y .

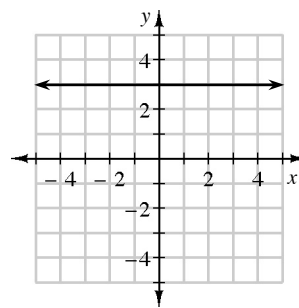
$$y = \frac{1}{2}x - 1$$



$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$



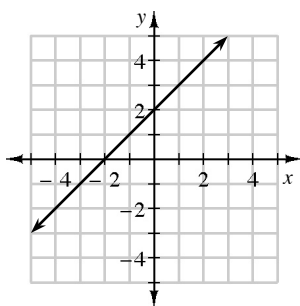
$$y = 0x + 3 \text{ o } y = 3$$



Ejemplo 2

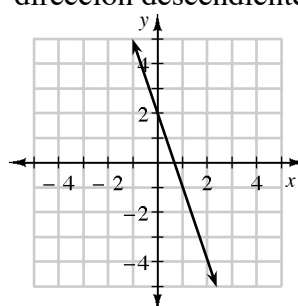
Cuando $m = 1$, como en $y = x$, la recta sube una unidad cada vez que adelanta una unidad a la derecha. Las rectas con mayor inclinación tienen un valor de m mayor, es decir, $m > 1$ o $m < -1$. Las rectas más planas tienen un valor de m entre -1 y 1 , generalmente en forma de fracción. Los tres ejemplos a continuación tienen $b = 2$.

$$y = x + 2$$



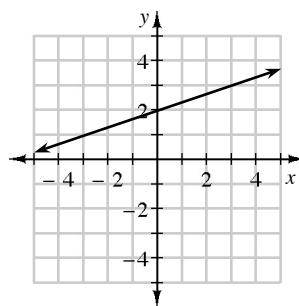
$$y = -3x + 2$$

(más inclinada y en
dirección descendente)



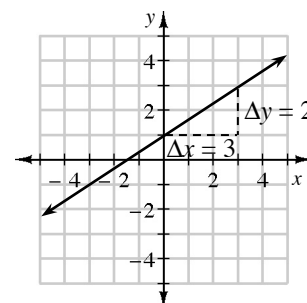
$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

(menos inclinada)

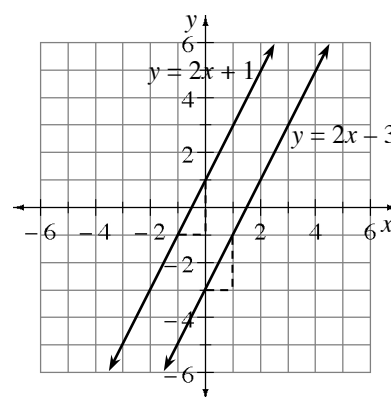


Ejemplo 3

Si se dibuja una recta en un conjunto de ejes, se puede dibujar un *triángulo de pendiente* entre dos puntos convenientes (normalmente donde se cruzan las rectas de la grilla), como se muestra en el gráfico de la derecha. Cuenta la distancia vertical (llamada Δy) y la distancia horizontal (llamada Δx) en los lados punteados del triángulo de pendiente. Escribe las distancias en una razón: pendiente = $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$. El símbolo Δ significa cambios. El orden en la fracción es importante: el numerador (parte superior de la fracción) debe ser la distancia vertical y el denominador (parte inferior de la fracción) debe ser la distancia horizontal. La pendiente de una recta es constante; por lo tanto, la razón de la pendiente es la misma para dos puntos cualesquiera de una recta.



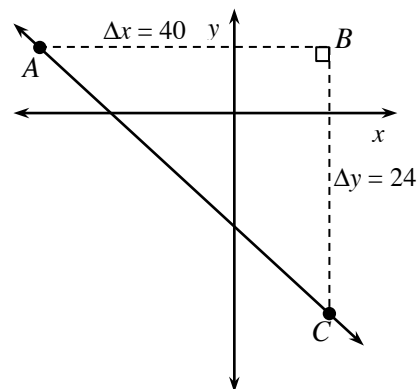
Las rectas paralelas tienen la misma inclinación y dirección, por tanto tienen la misma pendiente, como se observa en el gráfico de la derecha.



Si $\Delta y = 0$, entonces la recta es horizontal y tiene una pendiente de cero, es decir, $m = 0$. Si $\Delta x = 0$, entonces la recta es vertical y su pendiente es indefinida; por tanto, decimos que no tiene pendiente.

Ejemplo 4

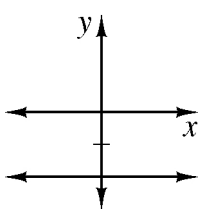
Cuando las distancias verticales y horizontales no son fáciles de determinar, puedes hallar la pendiente dibujando un triángulo de pendiente genérico y utilizándolo para hallar las longitudes de los segmentos vertical Δy y horizontal (Δx). La figura de la derecha muestra cómo hallar la pendiente de una recta que pasa por los puntos $(-21, 9)$ y $(19, -15)$. Primero grafica los puntos sobre ejes sin escala haciendo una aproximación de su ubicación, y luego dibuja un triángulo de pendiente. Luego, halla la distancia del lado vertical sabiendo que son 9 unidades desde el punto B hasta el eje x y luego 15 unidades desde el eje x hasta el punto C, entonces Δy es 24. Luego, halla la distancia desde el punto A hasta el eje y (21) y la distancia desde el eje y hasta el punto B (19). Δx es 40. Esta pendiente es negativa porque la recta baja de izquierda a derecha, entonces la pendiente es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{24}{40} = -\frac{3}{5}$.



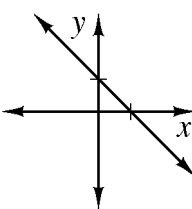
Problemas

¿La pendiente de cada recta es negativa, positiva, o cero?

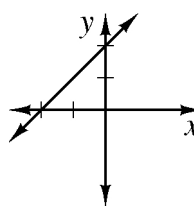
1.



2.



3.



Identifica la pendiente en cada ecuación. Indica si el gráfico de la recta es más inclinado o más plano que $y = x$ o $y = -x$, si sube o baja de izquierda a derecha, o si es horizontal o vertical.

4. $y = 3x + 2$

5. $y = -\frac{1}{2}x + 4$

6. $y = \frac{1}{3}x - 4$

7. $4x - 3 = y$

8. $y = -2 + \frac{1}{2}x$

9. $3 + 2y = 8x$

10. $y = 2$

11. $x = 5$

12. $6x + 3y = 8$

Sin graficar, encuentra la pendiente de cada recta basándote en la información dada.

13. $\Delta y = 27, \Delta x = -8$

14. $\Delta x = 15, \Delta y = 3$

15. $\Delta y = 7, \Delta x = 0$

16. Horizontal $\Delta = 6$
Vertical $\Delta = 0$

17. Entre $(5, 28)$ y $(64, 12)$

18. Entre $(-3, 2)$ y $(5, -7)$

Respuestas

1. cero

2. negativo

3. positivo

4. Pendiente = 3, más inclinada, arriba

5. Pendiente = $-\frac{1}{2}$, más plana, abajo

6. Pendiente = $\frac{1}{3}$, más plana, arriba

7. Pendiente = 4, más inclinada, arriba

8. Pendiente = $\frac{1}{2}$, más plana, arriba

9. Pendiente = 4, más inclinada, arriba

10. Pendiente = 0, horizontal

11. Pendiente indefinida, vertical

12. Pendiente = -2, más inclinada, abajo

13. $-\frac{27}{8}$

14. $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

15. indefinida

16. 0

17. $-\frac{16}{59}$

18. $-\frac{9}{8}$

CÓMO ESCRIBIR UNA ECUACIÓN A PARTIR DE LA PENDIENTE Y UN PUNTO EN LA RECTA

2.3.1

En trabajos anteriores, los alumnos utilizaron las sustituciones en ecuaciones como $y = 2x + 3$ para hallar los pares de x e y que hacían que la ecuación fuera verdadera. Los alumnos registraron los pares en una tabla, y luego los utilizaron como coordenadas para graficar una recta. Cada punto (x, y) en la recta hace que la ecuación sea verdadera.

Luego, los alumnos utilizaron los patrones que vieron en las tablas y gráficos para reconocer y escribir ecuaciones en la forma de $y = mx + b$. La “ b ” representa el punto de corte con el eje y de la recta, la “ m ” representa la pendiente, mientras que x e y representan las coordenadas de cualquier punto en la recta. Cada recta tiene un valor único para m y un valor único para b , pero existen infinitos valores (x, y) para cada ecuación lineal.

La pendiente de la recta es la misma entre dos puntos cualesquiera de la recta. Podemos utilizar esta información para escribir ecuaciones sin crear tablas o gráficos.

Para obtener información adicional, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas en las Lecciones 2.2.2 y 2.2.3.

Ejemplo 1

¿Cuál es la ecuación de una recta con una pendiente de 2 que pasa por el punto $(10, 17)$?

Escribe la ecuación general de una recta.

$$y = mx + b$$

Sustituye los valores que conocemos: m , x , e y .

$$17 = 2(10) + b$$

$$17 = 20 + b$$

Halla b .

$$-3 = b$$

Escribe la ecuación completa usando los valores $m = 2$ and $b = -3$.

$$y = 2x + 3$$

Ejemplo 2

Este método algebraico puede ayudarnos a escribir ecuaciones de rectas paralelas. Las rectas paralelas jamás se cruzan ni se intersectan. Tienen la *misma* pendiente, pero *distintos* puntos de cortes con el eje y , b .

¿Cuál es la ecuación de una recta paralela a $y = 3x - 4$ que pasa por el punto $(2, 8)$?

Escribe la ecuación general de una recta.

$$y = mx + b$$

Sustituye los valores que conocemos: m , x , y y.

Dado que las rectas son paralelas,
las pendientes son iguales.

$$8 = 3(2) + b$$

$$8 = 6 + b$$

$$2 = b$$

Halla b .

Escribe la ecuación completa.

$$y = 3x + 2$$

Problemas

Escribe la ecuación de una recta con la pendiente dada que pasa por el punto indicado.

1. pendiente = 5, $(3, 13)$ 2. pendiente = $-\frac{5}{3}$, $(3, -1)$ 3. pendiente = -4, $(-2, 9)$

4. pendiente = $\frac{3}{2}$, $(6, 8)$ 5. pendiente = 3, $(-7, -23)$ 6. pendiente = 2, $(\frac{5}{2}, -2)$

Escribe la ecuación de una recta *paralela* a la recta dada que pasa por el punto dado.

7. $y = \frac{3}{5}x + 2$ $(0, 0)$ 8. $y = 4x - 1$ $(-2, -6)$ 9. $y = -2x + 5$ $(-4, -2)$

10. $y = 4x + 5$ $(-6, -28)$ 11. $y = \frac{1}{3}x - 1$ $(6, 9)$ 12. $y = 3x + 8$ $(0, \frac{1}{2})$

Respuestas

1. $y = 5x - 2$ 2. $y = -\frac{5}{3}x + 4$ 3. $y = -4x + 1$

4. $y = \frac{3}{2}x - 1$ 5. $y = 3x - 2$ 6. $y = 2x - 7$

7. $y = \frac{3}{5}x$ 8. $y = 4x + 2$ 9. $y = -2x - 10$

10. $y = 4x - 4$ 11. $y = \frac{1}{3}x + 7$ 12. $y = 3x + \frac{1}{2}$

CÓMO ESCRIBIR LA ECUACIÓN DE UNA RECTA A PARTIR DE DOS PUNTOS

2.3.2

Ahora los alumnos tienen todas las herramientas que necesitan para hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados. Recuerda que la ecuación de una recta requiere una pendiente y un punto de corte con el eje y en $y = mx + b$. Los alumnos pueden escribir la ecuación de una recta que pasa por dos puntos creando un triángulo de pendiente y calculando $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tal como se explica en las Lecciones 2.1.2 a 2.1.4.

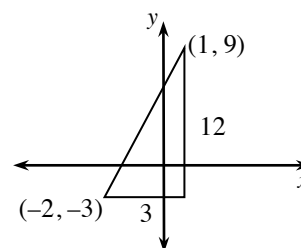
Para obtener más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas en la Lección 3.3.2. Si quieres ejercicios adicionales y más práctica, consulta el material del Punto de comprobación 5B.

Ejemplo 1

Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 9)$ y $(-2, -3)$.

Posiciona los dos puntos aproximadamente donde corresponden sobre los ejes de coordenadas, no es necesario que seas preciso. Dibuja un triángulo de pendiente genérico.

Calcula pendiente = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12}{3} = 4$ utilizando los valores dados de los dos puntos.



Escribe la ecuación general de una recta.

$$y = mx + b$$

Sustituye m y cualquiera de los puntos en la ecuación. Por ejemplo, usa $(x, y) = (1, 9)$ y $m = 4$.

$$9 = 4(1) + b$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{12}{3} \\ m &= 4\end{aligned}$$

Resuelve b .

$$5 = b$$

Escribe la ecuación completa.

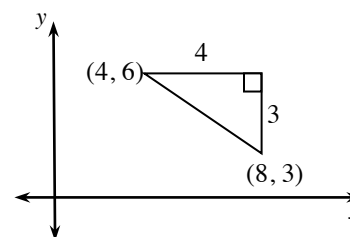
$$y = 4x + 5$$

Ejemplo 2

Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(8, 3)$ y $(4, 6)$.

Dibuja un triángulo de pendiente genérico ubicado aproximadamente en los ejes de coordenadas. Aproxima las ubicaciones de los puntos dados.

Calcula $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{4}$. La pendiente es negativa ya que la recta baja de izquierda a derecha.



Sustituye m y cualquiera de los puntos, por ejemplo $(8, 3)$, en la ecuación general de una recta.

$$y = mx + b$$

$$3 = -\frac{3}{4}(8) + b$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-3}{4} \\ m &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Resuelve b .

$$9 = b$$

Escribe la ecuación completa.

$$y = -\frac{3}{4}x + 9$$

Problemas

Escribe la ecuación de la recta que contiene cada par de puntos.

1. $(1, 1)$ y $(0, 4)$

2. $(5, 4)$ y $(1, 1)$

3. $(1, 3)$ y $(-5, -15)$

4. $(-2, 3)$ y $(3, 5)$

5. $(2, -1)$ y $(3, -3)$

6. $(4, 5)$ y $(-2, -4)$

7. $(1, -4)$ y $(-2, 5)$

8. $(-3, -2)$ y $(5, -2)$

9. $(-4, 1)$ y $(5, -2)$

Respuestas

1. $y = -3x + 4$

2. $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

3. $y = 3x$

4. $y = \frac{2}{5}x + 3\frac{4}{5}$

5. $y = -2x + 3$

6. $y = \frac{3}{2}x - 1$

7. $y = -3x - 1$

8. $y = -2$

9. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

PROPIEDADES DE LA POTENCIA

3.1.1 y 3.1.2

Por lo general, simplificar una expresión que contiene exponentes significa eliminar los paréntesis y exponentes negativos, de ser posible. A continuación se mencionan las **propiedades básicas de la potencia**.

- | | | |
|-----|-----------------------------|---|
| (1) | $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ | Ejemplos: $x^3 \cdot x^4 = x^7$; $2^7 \cdot 2^4 = 2^{11}$ |
| (2) | $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ | Ejemplos: $\frac{x^{10}}{x^4} = x^6$; $\frac{2^4}{2^7} = 2^{-3}$ |
| (3) | $(x^a)^b = x^{ab}$ | Ejemplos: $(x^4)^3 = x^{12}$; $(2x^3)^5 = 2^5 \cdot x^{15} = 32x^{15}$ |
| (4) | $x^0 = 1$ | Ejemplos: $2^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ |
| (5) | $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ | Ejemplos: $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$; $y^{-4} = \frac{1}{y^4}$; $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ |
| (6) | $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$ | Ejemplos: $\frac{1}{x^{-5}} = x^5$; $\frac{1}{x^{-2}} = x^2$; $\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$ |
| (7) | $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ | Ejemplos: $x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$; $y^{1/2} = \sqrt{y}$ |

En todas las expresiones con fracciones, partimos de la base de que el denominador no es igual a cero.

Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 3.1.2. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta los problemas del Punto de comprobación 5A que se incluyen al final del libro.

Ejemplo 1

Simplificar: $(2xy^3)(5x^2y^4)$

Reordenar: $2 \cdot 5 \cdot x \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot y^4$

Usar principio (1): $10x^3y^7$

Ejemplo 2

Simplificar: $\frac{14x^2y^{12}}{7x^5y^7}$

Separar: $\left(\frac{14}{7}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^5}\right) \cdot \left(\frac{y^{12}}{y^7}\right)$

Usar principios (2) y (5): $2x^{-3}y^5 = \frac{2y^5}{x^3}$

Ejemplo 3

Simplificar: $(3x^2y^4)^3$

Usar principio (3): $3^3 \cdot (x^2)^3 \cdot (y^4)^3$

Usar principio (3) de nuevo: $27x^6y^{12}$

Ejemplo 4

Simplificar: $(2x^3)^{-2}$

Usar principio (5): $\frac{1}{(2x^3)^2}$

Usar principio (3): $\frac{1}{2^2 \cdot (x^3)^2}$

Usar principio (3) de nuevo: $\frac{1}{4x^6}$

Ejemplo 5

Simplificar: $\frac{10x^7y^3}{15x^{-2}y^3}$

Separar: $\left(\frac{10}{15}\right) \cdot \left(\frac{x^7}{x^{-2}}\right) \cdot \left(\frac{y^3}{y^3}\right)$

Usar principio (2): $\frac{2}{3}x^9y^0$

Usar principio (4): $\frac{2}{3}x^9 \cdot 1 = \frac{2}{3}x^9 = \frac{2x^9}{3}$

Problemas

Simplifica las siguientes expresiones. Las respuestas finales no deben contener paréntesis ni exponentes negativos.

1. $y^5 \cdot y^7$

2. $b^4 \cdot b^3 \cdot b^2$

3. $8^6 \cdot 8^{-2}$

4. $(y^5)^2$

5. $(3a)^4$

6. $\frac{m^8}{m^3}$

7. $\frac{12m^8}{6m^{-3}}$

8. $(x^3y^2)^3$

9. $\frac{(y^4)^2}{(y^3)^2}$

10. $\frac{15x^2y^5}{3x^4y^5}$

11. $(4c^4)(ac^3)(3a^5c)$

12. $(7x^3y^5)^2$

13. $(4xy^2)(2y)^3$

14. $\left(\frac{4}{x^2}\right)^3$

15. $\frac{(2a^7)(3a^2)}{6a^3}$

16. $\left(\frac{5m^3n}{m^5}\right)^3$

17. $(3a^2x^3)^2(2ax^4)^3$

18. $\left(\frac{x^3y}{y^4}\right)^4$

19. $\left(\frac{6x^8y^2}{12x^3y^7}\right)^2$

20. $\frac{(2x^5y^3)^3(4xy^4)^2}{8x^7y^{12}}$

21. x^{-3}

22. $2x^{-3}$

23. $(2x)^{-3}$

24. $(2x^3)^0$

25. $5^{1/2}$

26. $\left(\frac{2x}{3}\right)^{-2}$

Respuestas

- | | | |
|------------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1. y^{12} | 2. b^9 | 3. 8^4 |
| 4. y^{10} | 5. $81a^4$ | 6. m^5 |
| 7. $2m^{11}$ | 8. x^9y^6 | 9. y^2 |
| 10. $\frac{5}{x^2}$ | 11. $12a^6c^8$ | 12. $49x^6y^{10}$ |
| 13. $32xy^5$ | 14. $\frac{64}{x^6}$ | 15. a^6 |
| 16. $\frac{125n^3}{m^6}$ | 17. $72a^7x^{18}$ | 18. $\frac{x^{12}}{y^{12}}$ |
| 19. $\frac{x^{10}}{4y^{10}}$ | 20. $16x^{10}y^5$ | 21. $\frac{1}{x^3}$ |
| 22. $\frac{2}{x^3}$ | 23. $\frac{1}{8x^3}$ | 24. 1 |
| 25. $\sqrt{5}$ | 26. $\frac{9}{4x^2}$ | |

ECUACIONES ↔ AZULEJOS ALGEBRAICOS

3.2.1

Se puede utilizar un tablero de ecuaciones junto con azulejos algebraicos para representar el proceso de resolución de ecuaciones. Si necesitas ayuda con la Lección 3.2.1, consulta las Lecciones A.1.1 a A.1.9 de esta *Guía para padres con práctica adicional*.

Los recuadros de Apuntes de matemáticas de la Lección A.1.8 (en el Apéndice del libro) y la Lección 3.2.1 contienen una lista de todos los movimientos “legales” y sus equivalentes algebraicos correspondientes. Consulta también el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección A.1.9 (en el Apéndice del libro) para verificar las soluciones.

Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta los problemas del Punto de comprobación 1 que se incluye al final del libro.

El área de un triángulo se puede hallar de dos formas: como producto de la (altura) · (base) o como la suma de las áreas de las partes individuales del rectángulo. Para un rectángulo dado, estas dos áreas deben ser iguales, así que **área como producto = área como suma**. Los azulejos algebraicos y, más adelante, los rectángulos genéricos permiten crear modelos de áreas que nos ayudan a multiplicar expresiones de forma visual y concreta.

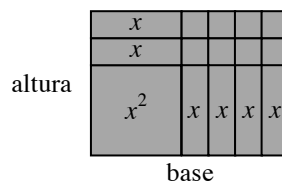
Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 3.2.2, 3.2.3, o 3.3.3. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material del Punto de comprobación 6B que se incluye al final del libro.

Ejemplo 1: Uso de azulejos algebraicos

Los azulejos algebraicos $x^2 + 6x + 8$ se colocaron en un rectángulo como se ve a la derecha. El área del rectángulo puede escribirse como el **producto** de su base y su altura o como la **suma** de sus partes.

$$\underbrace{(x+4)}_{\text{base}} \underbrace{(x+2)}_{\text{altura}} = \underbrace{x^2 + 6x + 8}_{\text{área}}$$

área como **producto** área como **suma**



Ejemplo 2: Uso de rectángulos genéricos

Un rectángulo genérico nos permite organizar el problema de la misma forma que en el primer ejemplo pero sin tener que dibujar cada uno de los azulejos. No es necesario dibujarlo en forma precisa o a escala.

Multiplicar $\underbrace{(2x+1)}_{\text{base}} \underbrace{(x-3)}_{\text{altura}}$

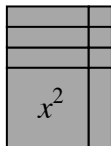
$$\begin{array}{c|c} -3 & \\ \hline x & \end{array} \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c} -3 & -6x \\ \hline x & 2x^2 \end{array} \begin{array}{c|c} & -3 \\ \hline & x \end{array} \Rightarrow (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 5x - 3$$

área como producto área como suma

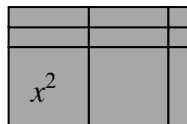
Problemas

Escribe un enunciado que demuestre que el **área como producto** es igual al **área como suma**.

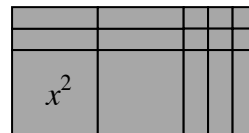
1.



2.



3.



4.

$$\begin{array}{r|cc} x & x^2 & 3x \\ \hline -5 & -5x & -15 \\ \hline & x & +3 \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{r|cc} 6 & 18y & -12x \\ \hline & 3y & -2x \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{r|cc} 3y & 3xy & 12y \\ \hline -2 & -2x & -8 \\ \hline & x & +4 \end{array}$$

Multiplica.

- | | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 7. $(3x + 2)(2x + 7)$ | 8. $(2x - 1)(3x + 1)$ | 9. $(2x)(x - 1)$ |
| 10. $(2y - 1)(4y + 7)$ | 11. $(y - 4)(y + 4)$ | 12. $(y)(x - 1)$ |
| 13. $(3x - 1)(x + 2)$ | 14. $(2y - 5)(y + 4)$ | 15. $(3y)(x - y)$ |
| 16. $(3x - 5)(3x + 5)$ | 17. $(4x + 1)^2$ | 18. $(x + y)(x + 2)$ |
| 19. $(2y - 3)^2$ | 20. $(x - 1)(x + y + 1)$ | 21. $(x + 2)(x + y - 2)$ |

Respuestas

- | | | |
|--------------------------------------|---|--------------------------|
| 1. $(x + 1)(x + 3) = x^2 + 4x + 3$ | 2. $(x + 2)(2x + 1) = 2x^2 + 5x + 2$ | |
| 3. $(x + 2)(2x + 3) = 2x^2 + 7x + 6$ | 4. $(x - 5)(x + 3) = x^2 - 2x - 15$ | |
| 5. $6(3y - 2x) = 18y - 12x$ | 6. $(x + 4)(3y - 2) = 3xy - 2x + 12y - 8$ | |
| 7. $6x^2 + 25x + 14$ | 8. $6x^2 - x - 1$ | 9. $2x^2 - 2x$ |
| 10. $8y^2 + 10y - 7$ | 11. $y^2 - 16$ | 12. $xy - y$ |
| 13. $3x^2 + 5x - 2$ | 14. $2y^2 + 3y - 20$ | 15. $3xy - 3y^2$ |
| 16. $9x^2 - 25$ | 17. $16x^2 + 8x + 1$ | 18. $x^2 + 2x + xy + 2y$ |
| 19. $4y^2 - 12y + 9$ | 20. $x^2 + xy - y - 1$ | 21. $x^2 + xy + 2y - 4$ |

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON MULTIPLICACIÓN O VALORES ABSOLUTOS

3.3.1

Para **resolver una ecuación con multiplicación**, primero usa la Propiedad distributiva o un rectángulo genérico para reescribir la ecuación sin paréntesis. Luego resuelve de la forma habitual. Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 3.3.1. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material del Punto de comprobación 6B que se incluye al final del libro.

Para **resolver una ecuación con un valor absoluto**, primero divide el problema en dos casos, ya que la cantidad dentro de un valor absoluto puede ser positiva o negativa. Luego, resuelve cada parte de la forma habitual.

Ejemplo 1

Resuelve $6(x + 2) = 3(5x + 1)$

Usa la Propiedad distributiva.

$$6x + 12 = 15x + 3$$

Resta $6x$.

$$12 = 9x + 3$$

Resta 3.

$$9 = 9x$$

Divide por 9.

$$1 = x$$

Ejemplo 2

Resuelve $x(2x - 4) = (2x + 1)(x + 5)$

Reescribe la ecuación usando la Propiedad distributiva del lado izquierdo del signo de igual y un rectángulo genérico del lado derecho.

$$2x^2 - 4x = \begin{array}{|c|c|} \hline +5 & 10x & 5 \\ \hline x & 2x^2 & x \\ \hline \end{array}$$

$$2x^2 - 4x = 2x^2 + 11x + 5$$

Resta $2x^2$ en ambos lados.

$$-4x = 11x + 5$$

Resta $11x$ en ambos lados.

$$-15x = 5$$

Divide por -15 .

$$x = \frac{5}{-15} = -\frac{1}{3}$$

Ejemplo 3Resuelve $|2x - 3| = 7$

Separa en dos casos.

$$2x - 3 = 7 \quad \text{o} \quad 2x - 3 = -7$$

Suma 3.

$$2x = 10 \quad \text{o} \quad 2x = -4$$

Divide por 2.

$$x = 5 \quad \text{o} \quad x = -2$$

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1. $3(c + 4) = 5c + 14$ | 2. $x - 4 = 5(x + 2)$ |
| 3. $7(x + 7) = 49 - x$ | 4. $8(x - 2) = 2(2 - x)$ |
| 5. $5x - 4(x - 3) = 8$ | 6. $4y - 2(6 - y) = 6$ |
| 7. $2x + 2(2x - 4) = 244$ | 8. $x(2x - 4) = (2x + 1)(x - 2)$ |
| 9. $(x - 1)(x + 7) = (x + 1)(x - 3)$ | 10. $(x + 3)(x + 4) = (x + 1)(x + 2)$ |
| 11. $2x - 5(x + 4) = -2(x + 3)$ | 12. $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$ |
| 13. $(x - 3)(x + 5) = x^2 - 7x - 15$ | 14. $(x + 2)(x - 2) = (x + 3)(x - 3)$ |
| 15. $\frac{1}{2}x(x + 2) = \left(\frac{1}{2}x + 2\right)(x - 3)$ | 16. $ 3x + 2 = 11$ |
| 17. $ 5 - x = 9$ | 18. $ 3 - 2x = 7$ |
| 19. $ 2x + 3 = -7$ | 20. $ 4x + 1 = 10$ |

Respuestas

- | | | |
|-------------------------------|---|-----------------------|
| 1. $c = -1$ | 2. $x = -3.5$ | 3. $x = 0$ |
| 4. $x = 2$ | 5. $x = -4$ | 6. $y = 3$ |
| 7. $x = 42$ | 8. $x = 2$ | 9. $x = 0.5$ |
| 10. $x = -2.5$ | 11. $x = -14$ | 12. todos los números |
| 13. $x = 0$ | 14. sin solución | 15. $x = -12$ |
| 16. $x = 3$ o $-\frac{13}{3}$ | 17. $x = -4$ o 14 | 18. $x = -2$ o 5 |
| 19. sin solución | 20. $x = \frac{9}{4}$ o $-\frac{11}{4}$ | |

Reescribir ecuaciones con más de una variable requiere los mismos movimientos “legales” que usaste para resolver una ecuación con una variable en las Lecciones 3.2.1, A.1.8, y A.1.9. El resultado final suele no ser un número sino una expresión algebraica que contiene números y variables.

Puedes ver una lista de movimientos “legales” en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 3.2.1. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material del Punto de comprobación 6A que se incluye al final del libro.

Ejemplo 1

Halla y	$3x - 2y = 6$
Resta $3x$	$-2y = -3x + 6$
Divide por -2	$y = \frac{-3x+6}{-2}$
Simplifica	$y = \frac{3}{2}x - 3$

Ejemplo 2

Halla y	$7 + 2(x + y) = 11$
Resta 7	$2(x + y) = 4$
Distribuye el 2	$2x + 2y = 4$
Resta $2x$	$2y = -2x + 4$
Divide por 2	$y = \frac{-2x+4}{2}$
Simplifica	$y = -x + 2$

Ejemplo 3

Halla x	$y = 3x - 4$
Suma 4	$y + 4 = 3x$
Divide por 3	$\frac{y+4}{3} = x$

Ejemplo 4

Halla t	$I = prt$
Divide por pr	$\frac{I}{pr} = t$

Problemas

Halla el valor de la variable especificada en cada una de las siguientes ecuaciones.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. Halla y :
$5x + 3y = 15$ | 2. Halla x :
$5x + 3y = 15$ | 3. Halla w :
$2l + 2w = P$ |
| 4. Halla m :
$4n = 3m - 1$ | 5. Halla a :
$2a + b = c$ | 6. Halla a :
$b - 2a = c$ |
| 7. Halla p :
$6 - 2(q - 3p) = 4p$ | 8. Halla x :
$y = \frac{1}{4}x + 1$ | 9. Halla r :
$4(r - 3s) = r - 5s$ |

Respuestas (Otras formas equivalentes también son posibles)

1. $y = -\frac{5}{3}x + 5$

2. $x = -\frac{3}{5}y + 3$

3. $w = -l + \frac{P}{2}$

4. $m = \frac{4n+1}{3}$

5. $a = \frac{c-b}{2}$

6. $a = \frac{c-b}{-2}$ o $\frac{b-c}{2}$

7. $p = q - 3$

8. $x = 4y - 4$

9. $r = \frac{7s}{3}$

En esta lección, los alumnos tradujeron información escrita que generalmente representaba situaciones cotidianas con símbolos algebraicos y ecuaciones lineales. Los alumnos usaron conjeturas para definir específicamente el significado de cada una de las variables que usaron en sus ecuaciones.

Para más ejemplos y problemas, consulta los problemas del Punto de comprobación 7A que se incluyen al final del libro.

Ejemplo 1

El perímetro de un rectángulo es 60 cm. Su longitud (largo) es 4 veces su ancho (altura). Escribe una o más ecuaciones que representen la relación entre la longitud y el ancho.

Comienza identificando lo que desconoces de la situación. Luego define las variables usando conjeturas para representar lo que desconoces. Al realizar conjeturas debes identificar también las unidades de medida. Esto suele hacerse usando paréntesis, como se muestra en los ejemplos a continuación. En este problema desconocemos las medidas de la longitud y el ancho.

Que w represente el ancho (cm) del rectángulo y l represente su longitud (cm).

En este problema hay dos variables. Para encontrar soluciones únicas para estas dos variables, debes escribir dos ecuaciones únicas.

En función de la primera oración y lo que sabemos sobre los rectángulos, la ecuación $P = 2l + 2w$ puede usarse para escribir la ecuación $60 = 2l + 2w$. En función de la oración “la longitud es 4 veces el ancho” podemos escribir $l = 4w$.

Un sistema de ecuaciones contiene dos o más ecuaciones que usan las mismas variables para representar una situación. El sistema de ecuaciones que representa esta situación es:

Que w represente el ancho (cm) del rectángulo y l represente su longitud (cm).

$$l = 4w$$

$$2l + 2w = 60$$

Los alumnos que hayan completado otros cursos de CPM recordarán un método llamado Proceso 5-D. Este proceso no se vuelve a ver en este curso, pero los alumnos pueden usarlo para escribir y resolver ecuaciones para problemas de palabras.

Uso de una tabla 5-D:

	Definir		Desarrollar	Decidir
	Ancho	Longitud	Perímetro	$\text{¿}P = 60\text{?}$
Prueba 1:	10	$4(10)$	$2(40) + 2(10) = 100$	demasiado grande
Prueba 2:	5	$4(5)$	$2(20) + 2(5) = 50$	demasiado pequeño
	l	$4(l)$	$2(4w) + 2w = 60$	

Ejemplo 2

Mike gastó \$11.19 en una bolsa con caramelos rojos y azules. La bolsa pesaba 11 libras. Los caramelos rojos cuestan \$1.29 por libra y los caramelos azules cuestan \$0.79 por libra. ¿Cuántos caramelos rojos compró Mike?

Comienza identificando los datos desconocidos. La pregunta del problema es un buen lugar donde buscar porque suele preguntar algo desconocido. En este problema, la cantidad de caramelos rojos y la cantidad de caramelos azules son los valores desconocidos.

Que r represente la cantidad de caramelos rojos (lb) y b la cantidad de caramelos azules (lb).

Observa que las unidades de medida están definidas. Si solo dijéramos “ r = caramelos rojos” sería muy fácil confundirnos respecto de si r representa el *peso* de los caramelos o su *costo*.

En función del enunciado “la bolsa pesaba 11 libras” podemos escribir $r + b = 11$. Observa que, en esta ecuación, las unidades son lb + lb = lb, lo que tiene sentido.

El costo de los caramelos rojos será de \$1.29/libra multiplicado por su peso, o $1.29r$. De igual forma, el costo de los caramelos azules será de $0.79b$. Entonces, $1.29r + 0.79b = 11.19$.

Que r represente el peso de los caramelos rojos (lb)
y b el peso de los caramelos azules (lb).

$$r + b = 11$$

$$1.29r + 0.79b = 11.19$$

Problemas

Escribe una ecuación o sistema de ecuaciones que represente cada situación. No resuelvas tus ecuaciones.

1. La base de un rectángulo es tres veces más larga que su altura. Su perímetro mide 36 unidades. Halla la longitud de cada lado.
2. La base de un rectángulo es el doble de su altura. Su área es de 72 unidades cuadradas. Halla la longitud de cada lado.
3. La suma de dos enteros impares consecutivos es 76. ¿Cuáles son los números?
4. Nancy comenzó el año con \$425 en el banco y ahorra \$25 por semana. Seamus comenzó el año con \$875 y gasta \$15 por semana. ¿Cuándo tendrán ambos la misma cantidad de dinero en el banco?
5. Oliver gana \$50 al día y \$7.50 por cada paquete que procesa en la Empresa A. Por su primer día de trabajo, recibió un cheque por \$140. ¿Cuántos paquetes procesó?
6. Dustin tiene una colección de centavos y monedas de 25¢. Su valor total es de \$4.65. Hay 33 monedas. ¿Cuántos centavos y monedas de 25¢ tiene?
7. Una mezcla de una libra de pasas y maníes cuesta \$7.50. Las pasas cuestan \$3.25 por libra y los maníes \$5.75 por libra. ¿Cuánto de cada ingrediente hay en la mezcla?
8. Una entrada para adultos a un parque de diversiones cuesta \$24.95 y una entrada para niños cuesta \$15.95. Un grupo de 10 personas pagó \$186.50 para entrar al parque. ¿Cuántos de ellos eran adultos?
9. Katy pesa 105 libras y aumenta 2 libras por mes. James pesa 175 libras y adelgaza 3 libras al mes. ¿Cuándo pesarán lo mismo?
10. La Escuela Secundaria Harper tiene 125 alumnos menos que la Escuela Preparatoria Holmes. Cuando ambas escuelas se reúnen hay 809 alumnos. ¿Cuántos alumnos asisten a cada escuela?

Respuestas (otras formas equivalentes también son posibles)

Ecuación de una variable	Sistema de ecuaciones	Conjetura
1. $2w + 2(3w) = 36$	$l = 3w$ $2w + 2l = 36$	l = longitud, w = ancho
2. $w(2w) = 7$	$l = 2w$ $lw = 72$	l = longitud, w = ancho
3. $m + (m + 2) = 76$	$m + n = 76$ $n = m + 2$	m = el primer entero impar y n = el siguiente entero impar consecutivo
4. $425 + 25x = 875 - 15x$	$y = 425 + 25x$ $y = 875 - 15x$	x = la cantidad de semanas e y = la cantidad total de dinero en el banco
5. $50 + 7.5p = 140$		p = la cantidad de paquetes que procesó Oliver
6. $0.25q + 0.01(33 - q) = 4.65$	$q + p = 33$ $0.25q + 0.01p = 4.65$	q = cantidad de monedas de 25¢, p = cantidad de centavos
7. $3.25r + 5.75(1 - r) = 7.5$	$r + p = 1$ $3.25r + 5.75p = 7.5(1)$	r = peso de las pasas y p = peso de los maníes
8. $24.95a + 15.95(10 - a) = 186.5$	$a + c = 10$ $24.95a + 15.95c = 186.5$	a = cantidad de entradas para adultos y c = cantidad de entradas para niños
9. $105 + 2m = 175 - 3m$	$w = 105 + 2m$ $w = 175 - 3m$	m = cantidad de meses y w = el peso de cada persona
10. $x + (x - 125) = 809$	$x + y = 809$ $y = x - 125$	x = cantidad de alumnos de Holmes e y = cantidad de alumnos de Harper

Un sistema de ecuaciones tiene dos o más ecuaciones con dos o más variables. En el curso anterior, los alumnos aprendieron a resolver un sistema buscando el punto de corte de los gráficos. También aprendieron a usar el **Método de igualación** para hallar soluciones. Estos dos métodos son convenientes cuando ambas ecuaciones se encuentran en forma $y = mx + b$ (o pueden ser reescritas fácilmente en forma $y = mx + b$).

El **Método de sustitución** se utiliza para convertir un sistema de ecuaciones de dos variables en una ecuación de una variable. Este método es útil cuando una de las variables está aislada en una de las ecuaciones. Deben realizarse dos sustituciones para hallar los valores de x e y y lograr una solución completa.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 4.1.1, 4.2.2, 4.2.3, y 4.2.5. Para más ejemplos y problemas para resolver sistemas con múltiples métodos, consulta los problemas de los Puntos de comprobación 7A y 7B que se incluyen al final del libro.

La ecuación $x + y = 9$ tiene infinitas soluciones: $(10, -1)$, $(2, 7)$, $(0, 9)$, ..., pero si $y = 4$ solo existe un valor posible para x . Ese valor puede verse fácilmente al reemplazar (substituir) y por 4 en la ecuación original: $x + 4 = 9$, así que $x = 5$ cuando $y = 4$. La sustitución y esta observación son las bases de los siguientes métodos para resolver sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 1 (Método de igualación de sistemas de ecuaciones)

Resuelve:

$$\begin{aligned} y &= 2x \\ x + y &= 9 \end{aligned}$$

Para usar el Método de igualación de sistemas de ecuaciones, comienza reescribiendo ambas ecuaciones en forma $y = mx + b$. En este caso, la primera ecuación ya se halla en forma $y = mx + b$. La segunda ecuación puede reescribirse restando x en ambos lados.

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ -x &\quad -x \\ \hline y &= 9 - x \end{aligned}$$

Ya que y representa el mismo valor en la primera ecuación, $y = 2x$ y en la segunda, $y = 9 - x$, puedes escribir: $2x = 9 - x$.

$$\begin{aligned} \text{Halla } x: \quad 2x &= 9 - x \\ +x &\quad +x \\ \hline 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Luego puedes usar cualquier ecuación para hallar y .
Por ejemplo, la primera ecuación, $y = 2x$:

$$\begin{aligned} \text{Ya que } x &= 3 \text{ e } y = 2x: \\ y &= 2(3) \\ y &= 6 \end{aligned}$$

El ejemplo continúa en la página siguiente →

Continuación del ejemplo de la página anterior.

La solución a este sistema de ecuaciones es $x = 3$ e $y = 6$. Es decir, los valores $x = 3$ e $y = 6$ hacen que ambas ecuaciones originales sean verdaderas. Al graficar, el punto $(3, 6)$ es el punto de corte de ambas rectas.

Siempre verifica tu solución sustituyendo la solución en *ambas* ecuaciones originales para comprobar que ambos enunciados sean verdaderos:

Para $y = 2x$ en $(3, 6)$,

$$\overset{?}{6} = 2(3)$$

$6 = 6$ es un enunciado verdadero.

Para $x + y = 9$ en $(3, 6)$,

$$3 + \overset{?}{6} = 9$$

$9 = 9$ es un enunciado verdadero.

Ejemplo 2 (Método de sustitución)

Resuelve: $y = 2x$
 $x + y = 9$

El mismo sistema de ecuaciones del Ejemplo 1 puede resolverse usando el Método de sustitución. De la primera ecuación sabemos que y es equivalente a $2x$. Por lo tanto, puedes reemplazar la y de la segunda ecuación por $2x$:

$$x + y = 9$$

Reemplaza y por $2x$ y resuelve.

$$x + (2x) = 9$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

Luego puedes usar cualquiera de las ecuaciones para hallar y . Por ejemplo, usa la primera ecuación, $y = 2x$, para hallar y :

$$y = 2x$$

Ya que $x = 3$,

$$y = 2(3)$$

$$y = 6$$

La solución a este sistema de ecuaciones es $x = 3$ e $y = 6$. Es decir, los valores $x = 3$ e $y = 6$ hacen que ambas ecuaciones originales sean verdaderas. Al graficar, el punto $(3, 6)$ es el punto de corte de ambas rectas.

Siempre verifica tu solución sustituyendo la solución en *ambas* ecuaciones originales para comprobar que ambos enunciados sean verdaderos (ver Ejemplo 1).

Ejemplo 3 (Método de sustitución)

Cuando uses el Método de sustitución, busca una sustitución conveniente; busca una variable que sea, en sí misma, uno de los lados de la ecuación.

Resuelve: $4x + y = 8$

$$x = 5 - y$$

Ya que x es equivalente a $5 - y$, reemplaza x en la primera ecuación con $5 - y$. Resuelve de la forma usual.

Para hallar x , usa cualquiera de las dos ecuaciones originales.
En este caso, usaremos $x = 5 - y$.

$$x = 5 - y$$

Ya que $y = 4$,

$$x = 5 - (4)$$

$$x = 1$$

$$4x + y = 8$$

$$4(5 - y) + y = 8$$

$$20 - 4y + y = 8$$

$$20 - 3y = 8$$

$$-3y = -12$$

$$y = 4$$

La solución es $(1, 4)$. Siempre verifica tu solución sustituyendo la solución en *ambas* ecuaciones originales para comprobar que ambos enunciados sean verdaderos.

Ejemplo 4

No todos los sistemas tienen una solución. Si la sustitución da por resultado una ecuación que no es verdadera, entonces **no hay solución**. El gráfico de un sistema de dos ecuaciones lineales sin solución es dos rectas paralelas; no hay punto de corte. Consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 4.2.5 para más información.

Resuelve: $y = 7 - 3x$

$$3x + y = 10$$

Reemplaza y en la segunda ecuación por $7 - 3x$.

La ecuación resultante nunca es verdadera.

Este sistema de ecuaciones no tiene solución.

$$3x + y = 10$$

$$3x + (7 - 3x) = 10$$

$$3x - 3x + 7 = 10$$

$$7 \neq 10$$

Ejemplo 5

También puede haber una **cantidad infinita de soluciones**. Este gráfico toma la forma de una única recta para las dos ecuaciones.

Resuelve: $y = 4 - 2x$
 $-4x - 2y = -8$

Substituye $4 - 2x$ en la segunda ecuación por y .

Este enunciado siempre es verdadero. Este sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

$$\begin{aligned} -4x - 2y &= -8 \\ -4x - 2(4 - 2x) &= -8 \\ -4x - 8 + 4x &= -8 \\ -8 &= -8 \end{aligned}$$

Ejemplo 6

A veces, debes despejar x o y en alguna de las ecuaciones para usar el Método de sustitución.

Resuelve: $y - 2x = -7$
 $3x - 4y = 8$

Despeja y en la primera ecuación para obtener $y = 2x - 7$.
 Luego sustituye y por $2x - 7$ en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} 3x - 4(2x - 7) &= 8 \\ 3x - 8x + 28 &= 8 \\ -5x + 28 &= 8 \\ -5x &= -20 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Luego halla y . $y = 2x - 7$
 Ya que $x = 4$,
 $y = 2(4) - 7$
 $y = 1$

Verifica: $1 - 2(4) = -7$ y $3(4) - 4(1) = 8$.

La solución es $(4, 1)$. Este será el punto de corte de las dos rectas. Siempre verifica tu solución sustituyendo la solución en *ambas* ecuaciones originales para comprobar que ambos enunciados sean verdaderos.

Problemas

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--|
| 1. $y = -3x$
$4x + y = 2$ | 2. $y = 7x - 5$
$2x + y = 13$ | 3. $x = -5y - 4$
$x - 4y = 23$ |
| 4. $x + y = 10$
$y = x - 4$ | 5. $y = 5 - x$
$4x + 2y = 10$ | 6. $3x + 5y = 23$
$y = x + 3$ |
| 7. $y = -x - 2$
$2x + 3y = -9$ | 8. $y = 2x - 3$
$-2x + y = 1$ | 9. $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$
$2x + y = -1$ |
| 10. $a = 2b + 4$
$b - 2a = 16$ | 11. $y = 3 - 2x$
$4x + 2y = 6$ | 12. $y = x + 1$
$x - y = 1$ |

Respuestas

- | | | |
|-----------------|--------------------------|------------------|
| 1. $(2, -6)$ | 2. $(2, 9)$ | 3. $(11, -3)$ |
| 4. $(7, 3)$ | 5. $(0, 5)$ | 6. $(1, 4)$ |
| 7. $(3, -5)$ | 8. Sin solución | 9. $(0, -1)$ |
| 10. $(-12, -8)$ | 11. Soluciones infinitas | 12. Sin solución |

MÉTODO DE ELIMINACIÓN

4.2.3 – 4.2.5

En problemas anteriores con sistemas de ecuaciones, una de las variables solía estar sola de un lado de una de las dos ecuaciones. En esos casos, es conveniente reescribir ambas ecuaciones en forma $y = mx + b$ y usar el Método de igualación de sistemas de ecuaciones o sustituir la expresión por una variable en la otra ecuación usando el Método de sustitución.

Otro método para resolver sistemas de ecuación es el **Método de eliminación**. Este método es especialmente conveniente cuando ambas ecuaciones se encuentran en forma estándar ($ax + by = c$). Para resolver este tipo de sistemas, podemos reescribir las ecuaciones concentrándonos en los coeficientes (los números delante de las variables).

Para más información sobre el Método de eliminación, consulta el problema 4-56 del libro.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 4.2.4 y 5.1.1. Para más ejemplos y problemas para resolver sistemas con múltiples métodos, consulta los problemas de los Puntos de comprobación 7A y 7B que se incluyen al final del libro.

Ejemplo 1

Resuelve: $x - y = 2$
 $2x + y = 1$

Recuerda que puedes añadir la misma expresión a ambos lados de una ecuación. Ya que $x - y$ es equivalente a 2 (de la primera ecuación), puedes añadir $x - y$ a un lado de la segunda ecuación y 2 al otro lado y resolver.

$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ +x - y & & + 2 \\ \hline 3x & = & 3 \end{array}$$

Observa que esta es una forma efectiva de eliminar y y hallar x porque $-y$ e y eran términos opuestos; $y + (-y) = 0$.

$$x = 1$$

Ahora sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales para hallar el valor de y .

$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ \text{Ya que } x = 1, & & \\ 2(1) + y & = & 1 \\ 2 + y & = & 1 \\ y & = & -1 \end{array}$$

La solución es $(1, -1)$, ya que $x = 1$ e $y = -1$ hacen que ambas ecuaciones originales sean verdaderas. En un gráfico, el punto de corte de las dos rectas originales es $(1, -1)$. Siempre verifica tu solución sustituyendo la solución en *ambas* ecuaciones originales para comprobar que ambos enunciados sean verdaderos.

Para más información sobre el Método de eliminación, consulta el problema 4-56 del libro.

Ejemplo 2

Resuelve: $3x + 6y = 24$

$$3x + y = -1$$

Observa que ambas ecuaciones contienen un término $3x$. Podemos reescribir $3x + y = -1$ multiplicando ambos lados por -1 , lo que da por resultado $-3x + (-y) = 1$. Ahora ambas ecuaciones tienen términos que son opuestos: $3x$ y $-3x$. Esto será útil en el próximo paso porque $-3x + 3x = 0$.

Ya que $-3x + (-y)$ es equivalente a 1 , podemos añadir $-3x + (-y)$ a un lado de la ecuación y 1 al otro lado.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 6y & = & 24 \\ -3x + (-y) & + & 1 \\ \hline 5y & = & 25 \\ y & = & 5 \end{array}$$

Observa que los dos términos opuestos, $3x$ y $-3x$, se eliminaron mutuamente, lo que nos ayuda a hallar y .

Luego sustituye el valor de y en una de las ecuaciones originales para hallar x .

$$3x + 6(5) = 24$$

La solución es $(-2, 5)$. Esto hace que ambas ecuaciones sean verdaderas y es el punto en que ambas rectas se intersectan en un gráfico. Siempre verifica tu solución sustituyendo la solución en *ambas* ecuaciones originales para verificar que ambos enunciados sean verdaderos.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 30 & = & 24 \\ 3x & = & -6 \\ x & = & -2 \end{array}$$

El próximo ejemplo muestra una explicación más detallada de este método.

Ejemplo 3

Para usar el Método de eliminación, uno de los términos de una de las ecuaciones debe ser opuesto al término correspondiente de la otra ecuación.

$$x + 3y = 7$$

Una de las ecuaciones puede ser multiplicada para hacer que ambos términos sean opuestos. Por ejemplo, en el sistema de la derecha no hay términos opuestos. Sin embargo, si la primera ecuación es multiplicada por -4 , las dos ecuaciones tendrán $4x$ y $-4x$ como opuestos. La primera ecuación es ahora $-4(x + 3y = 7) \rightarrow -4x + (-12y) = -28$. Al multiplicar una ecuación, asegúrate de multiplicar todos los términos de *ambos* lados de la ecuación. Tras reescribir la primera ecuación, el sistema se ve ahora de la siguiente forma:

$$4x - 7y = -10$$

$$-4x + (-12y) = -28$$

$$4x - 7y = -10$$

$$\begin{array}{rcl} -4x + (-12y) & = & -28 \\ + & 4x - 7y & -10 \\ \hline -19y & = & -38 \\ y & = & 2 \end{array}$$

Ya que $4x - 7y$ es equivalente a -10 , pueden ser añadidos a ambos lados de la primera ecuación:

Ahora puedes usar cualquier ecuación para hallar x :

Ya que $4x - 7y = -10$ e $y = 2$,

$$4x - 7(2) = -10$$

La solución a este sistema de ecuaciones es $(1, 2)$.

$$4x - 14 = -10$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Ejemplo 4

Si multiplicar una ecuación por un número no hace posible eliminar una variable, multiplica ambas ecuaciones por números distintos para obtener coeficientes iguales u opuestos.

Resuelve:

$$\begin{aligned} 8x - 7y &= 5 \\ 3x - 5y &= 9 \end{aligned}$$

Una posibilidad es multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por -8 . Los términos resultantes, $24x$ y $-24x$, serán opuestos, lo que permite usar el Método de eliminación.

$$\begin{aligned} 3(8x - 7y = 5) &\Rightarrow 24x - 21y = 15 \\ -8(3x - 5y = 9) &\Rightarrow -24x + 40y = -72 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones es ahora:

$$\begin{aligned} 24x - 21y &= 15 \\ -24x + 40y &= -72 \end{aligned}$$

Este sistema puede ser resuelto sumando las expresiones equivalentes (de la segunda ecuación) a la primera ecuación:

$$\begin{array}{r} 24x - 21y = 15 \\ + \quad -24x + 40y = -72 \\ \hline 19y = -57 \\ y = -3 \end{array}$$

Tras hallar x , la solución es $(-2, -3)$.

Para otro ejemplo como este (en que hubo que multiplicar ambas ecuaciones para crear términos opuestos), consulta el Ejemplo 2 de los materiales del Punto de comprobación 7B que se incluyen al final del libro.

Ejemplo 5

También pueden darse casos especiales que no tienen solución o tienen soluciones infinitas. Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 4.2.5.

Resuelve:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 6 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$

Multiplicar la segunda ecuación por 2 produce $4x + 2y = 6$. Las dos ecuaciones son idénticas, así que, al graficar, habrá una recta con soluciones *infinitas*, porque los mismos pares ordenados son verdaderos para ambas ecuaciones.

Resuelve:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 4x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

Multiplica la primera ecuación por 2 produce $4x + 2y = 6$. Ningún número puede hacer que $4x + 2y$ sea igual a 6, y $4x + 2y$ sea igual a 8 al mismo tiempo. Las rectas son paralelas y *no hay solución*, es decir, no hay punto de intersección.

RESUMEN DE LOS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

Método	Este método es más eficiente cuando	Ejemplo
Igualación de sistemas de ecuaciones	Ambas ecuaciones se encuentran en forma y .	$y = x - 2$ $y = -2x + 1$
Sustitución	Una variable se encuentra sola de un lado de una ecuación.	$y = -3x - 1$ $3x + 6y = 24$
Eliminación: sumar para eliminar una variable.	Las ecuaciones se encuentran en forma estándar y tienen coeficientes opuestos.	$x + 2y = 21$ $3x - 2y = 7$
Eliminación: multiplicar una ecuación para eliminar una variable.	Las ecuaciones se encuentran en forma estándar y una puede ser multiplicada para crear términos opuestos.	$x + 2y = 3$ $3x + 2y = 7$
Eliminación: multiplicar ambas ecuaciones para eliminar una variable.	Cuando los demás métodos no funcionan. En este caso puedes multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por -2 , y sumar para eliminar los términos opuestos.	$2x - 5y = 3$ $3x + 2y = 7$

Problemas

- | | | |
|------------------------------------|---|---------------------------------------|
| 1. $2x + y = 6$
$-2x + y = 2$ | 2. $-4x + 5y = 0$
$-6x + 5y = -10$ | 3. $2x - 3y = -9$
$x + y = -2$ |
| 4. $y - x = 4$
$2y + x = 8$ | 5. $2x - y = 4$
$\frac{1}{2}x + y = 1$ | 6. $-4x + 6y = -20$
$2x - 3y = 10$ |
| 7. $6x - 2y = -16$
$4x + y = 1$ | 8. $6x - y = 4$
$6x + 3y = -16$ | 9. $2x - 2y = 5$
$2x - 3y = 3$ |
| 10. $y - 2x = 6$
$y - 2x = -4$ | 11. $4x - 4y = 14$
$2x - 4y = 8$ | 12. $3x + 2y = 12$
$5x - 3y = -37$ |

Respuestas

- | | | |
|------------------|-------------------------|---------------|
| 1. $(1, 4)$ | 2. $(5, 4)$ | 3. $(-3, 1)$ |
| 4. $(0, 4)$ | 5. $(2, 0)$ | 6. Infinito |
| 7. $(-1, 5)$ | 8. $(-\frac{1}{6}, -5)$ | 9. $(4.5, 2)$ |
| 10. Sin solución | 11. $(3, -\frac{1}{2})$ | 12. $(-2, 9)$ |

INTRODUCCIÓN A LAS PROGRESIONES

5.1.1 – 5.1.3

En el Capítulo 5, los alumnos investigaron progresiones buscando patrones y reglas. En la primera parte del capítulo, se concentraron en las progresiones aritméticas (progresiones generadas sumando una constante al término anterior), y más adelante (y en el Capítulo 7) analizaron progresiones geométricas (progresiones generadas multiplicando el término anterior por una constante).

En las Lecciones 5.1.1 a 5.1.3, los alumnos aprendieron a usar dos tipos de progresiones, aritméticas y geométricas, y sus gráficos, en situaciones cotidianas.

Para más ejemplos y explicaciones, consulta la próxima sección de esta *Guía para padres con práctica adicional*, “Ecuaciones de progresiones”. Para más información, consulta la primera parte del recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 5.3.2.

Ejemplo 1

Un grupo de desarrolladores de huertos está preparando un terreno para crear una gran subdivisión para casas de familia. Ya construyeron 15 casa en el sitio. Los desarrolladores planean construir seis casas nuevas al mes. Crea una tabla de valores que muestre la cantidad de casas que habrá en la subdivisión a lo largo del tiempo. Escribe una ecuación que relacione la cantidad de casas con el tiempo transcurrido. Grafica la progresión.

Ya que la subdivisión tiene inicialmente 15 casas, 15 es la cantidad de casas en el momento $t = 0$. Después de un mes habrá seis casas más, o 21 casas. Después del segundo mes, habrá 27 casas. Después de cada mes, sumamos seis casas al total de casas en la subdivisión. Ya que sumamos una cantidad constante después de cada periodo de tiempo, esta es una **progresión aritmética**.

n , cantidad de meses	$t(n)$, cantidad total de casas
0	15
1	21
2	27
3	33
4	39

Podemos hallar la ecuación de esta situación si observamos que se trata de una función lineal: el crecimiento es constante. Todas las progresiones aritméticas son lineales.

Una forma de escribir la ecuación que representa esta situación es observando que la pendiente (crecimiento) = 6 casas/mes, y el punto de corte con el eje y (punto inicial) = 15. Entonces, en forma $y = mx + b$, la ecuación es $y = 6x + 15$.

Otra forma de hallar la ecuación de una recta, especialmente en situaciones más complejas, es usando dos puntos de la recta, calculando la pendiente (m) entre los dos puntos y hallando el punto de corte con el eje y (como en la Lección 2.3.2). Este método se demuestra en los próximos pasos:

El ejemplo continúa en la página siguiente →

Continuación del ejemplo de la página anterior.

Selecciona (1, 21) y (4, 39)

$$\text{pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

$$m = \frac{39-21}{4-1}$$

$$m = \frac{18}{3}$$

$$m = 6$$

$$y = mx + b$$

$$\text{en } (x, y) = (1, 21) \text{ y } m = 6,$$

$$21 = 6(1) + b$$

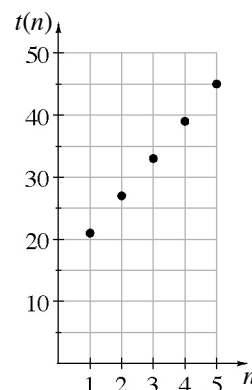
$$b = 15$$

$$y = 6x + 15$$

Escribimos la ecuación como $t(n) = 6n + 15$ para demostrar que existe una progresión aritmética (en lugar de la función lineal $y = mx + b$ o $f(x) = mx + b$) que nos permitirá hallar el término t para cualquier número n dado. En este caso, $t(n)$ representa la cantidad de casas y n la cantidad de meses.

La progresión sería: 21, 27, 33, 39, Observa que las progresiones suelen comenzar con el primer término (en este caso, el término para el primer mes, $n = 1$).

Puedes ver el gráfico de la progresión a la derecha. Observa que es lineal y que comienza con el punto (1, 21).



Ejemplo 2

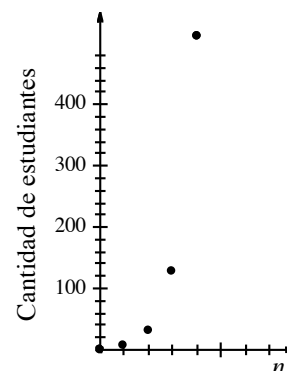
Cuando Rosa tropezó y cayó en un charco en la hora del almuerzo (¡se sintió muy avergonzada!), supo exactamente qué era lo que iba a pasar: en diez minutos, cada una de las dos chicas que la vieron caer se lo contarían a cuatro personas. En los diez minutos siguientes, esos ocho alumnos se lo dirían a cuatro personas más cada uno. Rosa sabía que esto continuaría hasta que toda la escuela estuviera hablando de su accidente. Si hay 2016 alumnos en la escuela, ¿cuántas “generaciones” de chismes se necesitarán para que todos estén hablando de Rosa? ¿Cuántos minutos se necesitarán? Grafica la situación.

En el momento $t = 0$, solos dos personas ven a Rosa tropezar y caer. Después de diez minutos, cada una de esas dos personas les habrá contado la situación a cuatro personas y habrá ocho alumnos hablando sobre Rosa. Después de otros diez minutos, cada uno de esos ocho alumnos habrá hablado con otros cuatro alumnos; habrá $8 \times 4 = 32$ alumnos hablando. Tras el tercer intervalo de diez minutos, cada uno de los 32 alumnos habrá hablado con 4 alumnos; $32 \times 4 = 128$ alumnos hablando.

En cada caso, multiplicamos la cantidad de alumnos anterior por cuatro para obtener la siguiente cantidad de alumnos. Este es un ejemplo de una **progresión geométrica**, y el multiplicador es cuatro. Podemos registrar esto en una tabla como la de la derecha, en la que n representa la cantidad de intervalos de diez minutos desde que Rosa se cayó y $t(n)$ representa la cantidad de alumnos que discuten el incidente en ese momento. Si seguimos con la tabla, veremos que en el momento $t = 6$, habrá 2048 alumnos discutiendo el accidente. Ya que solo hay 2016 alumnos en la escuela, todos sabrán lo que sucedió tras el sexto intervalo de diez minutos. Por lo tanto, poco antes de que transcurran 60 minutos, o una hora, todos sabrán que Rosa se cayó en el charco.

n , cantidad de intervalos de diez minutos	Cantidad de estudiantes
0	2
1	8
2	32
3	128
4	512
5	1024
6	2048

Puedes ver un gráfico de esta situación a la derecha. Una relación geométrica no es lineal, es exponencial. En lecciones futuras, los alumnos escribirán la progresión como 8, 32, 128, Observa que las progresiones suelen comenzar con el primer término (en este caso, el término para el primer mes es $n = 1$).



Problemas

1. Halla los términos faltantes en esta progresión aritmética y una ecuación para $t(n)$.

$$_, 15, 11, _, 3$$

2. En esta progresión, cada término es $\frac{1}{5}$ del anterior. Trabaja hacia adelante y hacia atrás para hallar los términos faltantes.

$$_, _, \frac{2}{3}, _, _$$

3. El 30° término de una progresión es 42. Si cada término de la progresión es cuatro unidades mayor que el anterior, ¿cuál es el primer término?
4. La longitud microscópica de una estructura cristalina crece de forma tal que cada día es 1.005 veces la longitud del día anterior. Si el tercer día la estructura medía 12.5 nm de largo, escribe una progresión que muestre cuánto medía los primeros cinco días (nm significa nanómetro, o 1×10^{-9} metros).
5. Davis ama conducir los automóviles en miniatura en el parque de diversiones, pero los conductores no pueden medir más de 125 cm. Si Davis medía 94 cm en su cuarto cumpleaños y crece aproximadamente 5.5 cm al año, ¿a qué edad será demasiado alto para conducir un automóvil en miniatura?

Respuestas

1. 19 y 8; $t(n) = 23 - 4n$
2. $\frac{50}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{15}, \frac{2}{75}$
3. $42 - 29(4) = -74$
4. $\approx 12.38, \approx 12.44, 12.5, \approx 12.56, \approx 12.63, \dots$
5. $t(n) = 5.5n + 94$, así que resuelve $5.5n + 94 \leq 125$. $n \approx 5.64$. Será demasiado alto cuando llegue a $\approx 4 + 5.64 = 9.64$. Davis podrá seguir conduciendo los automóviles en miniatura hasta que tenga aproximadamente $9\frac{1}{2}$ años.

ECUACIONES DE PROGRESIONES

5.2.1 – 5.2.3

En estas lecciones, los alumnos aprenderán múltiples representaciones de progresiones: listas de números, tablas, gráficos, y ecuaciones. Puedes leer más sobre la escritura de ecuaciones de progresiones en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 7.2.3.

Las ecuaciones de progresiones pueden ser escritas de forma explícita, como se explica en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 7.2.3, o como ecuaciones de recurrencia. Una fórmula explícita indica exactamente cómo hallar un término específico de una progresión. Una fórmula de recurrencia menciona el primer término (o cualquier término) y cómo pasar de ese término al siguiente. Para una explicación de las progresiones recurrentes, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 5.3.2.

Ejemplo 1

Este es el mismo caso del Ejemplo 1 de la sección anterior, *Introducción a las progresiones*.

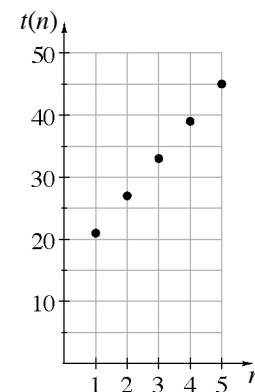
Un grupo de desarrolladores de huertos está preparando un terreno para crear una gran subdivisión para casas de familia. Ya construyeron 15 casa en el sitio. Los desarrolladores planean construir seis casas nuevas al mes. Escribe una progresión de la cantidad de casas construidas y luego una ecuación que la represente. Describe completamente un gráfico de esta progresión.

La progresión es 21, 27, 33, 39, Observa que las progresiones suelen comenzar con el primer término, donde la cantidad de meses es $n = 1$.

La diferencia común es $m = 6$, y el término cero es $b = 15$. La ecuación puede ser escrita como $t(n) = mn + b = 6n + 15$. Observa que en una progresión usamos $t(n)$ en lugar de y . $t(n)$ indica que la ecuación representa una progresión discreta y no una función continua. Los alumnos compararon progresiones y funciones en la Lección 5.3.3.

La ecuación también puede ser escrita como $a_n = 6n + 15$.

A la derecha se incluye el gráfico de esta progresión. No hay puntos de corte con los ejes x o y . No hay ningún punto en $(0, 15)$ porque las progresiones suelen escribirse comenzando con el *primer* término, donde $n = 1$. El dominio consiste de *números enteros* mayores o iguales a uno. El rango consiste de los valores de y de los puntos que siguen la regla $t(n) = 6n + 15$ cuando $n \geq 1$. No hay asíntotas. El gráfico es lineal y puede verse a la derecha. *Este gráfico es discreto* (puntos separados). (Nota: la función relacionada, $y = 6x + 15$, tendría como dominio todos los números reales (incluyendo fracciones y negativos) y el gráfico sería una recta continua con todos sus puntos conectados).



Ejemplo 2

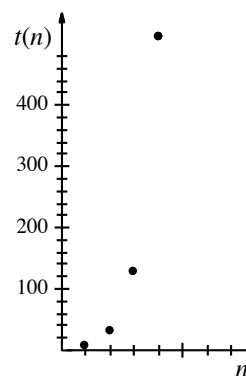
Este es el mismo caso del Ejemplo 2 de la sección anterior, *Introducción a las progresiones*.

Cuando Rosa tropezó y cayó en un charco en la hora del almuerzo (¡se sintió muy avergonzada!), supo exactamente qué era lo que iba a pasar: en diez minutos, cada una de las dos chicas que la vieron caer se lo contarían a cuatro personas. En los diez minutos siguientes, esos ocho alumnos se lo dirían a cuatro personas más cada uno. Rosa sabía que esto continuaría hasta que toda la escuela estuviera hablando de su accidente. Escribe una progresión de la cantidad de personas que sabrán sobre el accidente de Rosa después de cada intervalo de diez minutos y luego una ecuación que la represente. Describe completamente un gráfico de esta progresión.

El multiplicador es $b = 4$, y el término cero es $a = 2$. La ecuación puede escribirse como $t(n) = ab^n = 2 \cdot 4^n$. La ecuación también puede escribirse como $a_n = 2 \cdot 4^n$ (más adelante, en el Capítulo 7, los alumnos aprenderán también la notación de progresiones de “primer término”, $a_n = 8 \cdot 4^{(n-1)}$).

La progresión es: 8, 32, 128, 512, Observa que la progresión comienza con $n = 1$.

A la derecha se incluye el gráfico de esta progresión. No hay puntos de corte con los ejes x o y . No hay ningún punto en $(0, 2)$ porque las progresiones suelen escribirse comenzando con el *primer* término, donde $n = 1$. El dominio consiste en *números enteros* mayores o iguales a uno. El rango consiste en los valores de y de los puntos que siguen la regla $t(n) = 2(4)^n$ cuando $n \geq 1$. El gráfico es exponencial y puede verse a la derecha. No hay ninguna línea de simetría. Este gráfico es discreto (puntos separados). (Nota: la función relacionada, $y = 2 \cdot 4^n$, tendría como dominio todos los números reales (incluyendo fracciones y negativos) y el gráfico sería una curva con todos sus puntos conectados).



Ejemplo 3

Analiza las siguientes progresiones:

$$\begin{array}{l} \text{A: } -8, -5, -2, 1, \dots \\ \text{B: } 256, 128, 64, \dots \end{array}$$

- ¿Estas progresiones son aritméticas, geométricas, o de otro tipo? ¿Cómo lo sabes? Explícalo completamente.
- ¿Cuál es el término cero y el generador de cada progresión?
- Escribe una ecuación que represente cada progresión.
- ¿Es 378 un término de la progresión A? Justifica tu respuesta.
- ¿Es $\frac{1}{4}$ un término de la progresión B? Justifica tu respuesta.

Para determinar el tipo de progresión en los casos A y B, debemos observar cómo crece cada progresión.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{A:} & -8 & , & -5 & , & -2 & , & 1 & , & \dots \\ & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & & & \\ & +3 & & +3 & & +3 & & & & \end{array}$$

La progresión A es creada (generada) sumando tres a cada término para obtener el siguiente. Cuando cada término tiene una **diferencia común** (en este caso, “+3”) la progresión es **aritmética**.

Sin embargo, la progresión B es distinta. Los términos no tienen una diferencia común.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{B:} & 256 & , & 128 & , & 64 & , & \dots \\ & \backslash & / & \backslash & / & & & \\ & -128 & & -64 & & & & \end{array}$$

Estos términos tienen una **razón común** (multiplicador). Una progresión con una razón común es una **progresión geométrica**.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{B:} & 256 & , & 128 & , & 64 & , & \dots \\ & \backslash & / & \backslash & / & & & \\ & \cdot \frac{1}{2} & & \cdot \frac{1}{2} & & & & \end{array}$$

El primer término de la progresión A es -8 , y la progresión tiene un generador o diferencia común de $+3$. Por lo tanto, el término cero es -11 (porque $-11 + 3 = -8$). Una progresión aritmética tiene una ecuación de forma $t(n) = mn + b$ (o $a_n = mn + a_0$), donde m es la diferencia común y b el valor inicial. La ecuación de la progresión A es $t(n) = 3n - 11$, para $n = 1, 2, 3, \dots$

El ejemplo continúa en la página siguiente →

Continuación del ejemplo de la página anterior.

El primer término de la progresión B es 256, y la progresión tiene un generador o razón común de $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, el término cero es 512, porque $512 \cdot \frac{1}{2} = 256$. La ecuación general de una progresión geométrica es $t(n) = ab^n$, donde a es el término cero y b es la razón común (multiplicador). La ecuación de la progresión B es $t(n) = 512(\frac{1}{2})^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

Para saber si 378 es un término de la progresión A, podemos crear una lista de los términos de la progresión lo suficientemente larga para verificarlo, pero eso requeriría mucho tiempo. En cambio, veremos si existe un entero n que resuelva $t(n) = 3n - 11 = 378$.

$$3n - 11 = 378$$

$$3n = 389$$

$$n = \frac{389}{3} = 129 \frac{2}{3}$$

Cuando resolvemos, n no es un número entero, por lo que 378 no puede ser un término de la progresión.

De igual forma, para saber si $\frac{1}{4}$ es un término de la progresión B, tenemos que resolver $t(n) = 512(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{4}$, y buscar una solución que sea un número entero.

$$512\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{512} \cdot 512\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{512} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2048}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{11}}$$

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{11}}$$

$$n = 11$$

Si bien es probable que los alumnos nunca hayan resuelto una ecuación como esta, pueden resolver este problema realizando deducciones y comprobándolas. También pueden ver fácilmente la solución si escriben ambos lados como una potencia de 2.

Ya que la solución es un número entero, $\frac{1}{4}$ es un término de la progresión B.

Es decir, cuando $n = 11$, $t(n) = \frac{1}{4}$.

EJEMPLOS DE PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Menciona los cinco primeros términos de cada una de las siguientes progresiones aritméticas.

Ejemplo 4 (una fórmula explícita)

$$t(n) = 5n + 2$$

$$t(1) = 5(1) + 2 = 7$$

$$t(2) = 5(2) + 2 = 12$$

$$t(3) = 5(3) + 2 = 17$$

$$t(4) = 5(4) + 2 = 22$$

$$t(5) = 5(5) + 2 = 27$$

Ejemplo 5 (una fórmula de recurrencia)

$$t(1) = 3, t(n+1) = t(n) - 5$$

$$t(1) = 3$$

$$t(2) = t(1) - 5 = 3 - 5 = -2$$

$$t(3) = t(2) - 5 = -2 - 5 = -7$$

$$t(4) = t(3) - 5 = -7 - 5 = -12$$

$$t(5) = t(4) - 5 = -12 - 5 = -17$$

La progresión es: 7, 12, 17, 22, 27, ...

La progresión es: 3, -2, -7, -12, -17, ...

Ejemplo 6

Halla una fórmula explícita y una fórmula de recurrencia para la progresión: $-2, 1, 4, 7, \dots$

Explícita: $m = 3, b = -5$, así que la ecuación es: $t(n) = mn + b = 3n - 5$

De recurrencia: $t(1) = -2, t(n + 1) = t(n) + 3$

EJEMPLOS DE PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Menciona los cinco primeros términos de cada una de las siguientes progresiones geométricas.

Ejemplo 7 (una fórmula explícita)

$$t(n) = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$t(1) = 3 \cdot 2^{1-1} = 3 \cdot 2^0 = 3$$

$$t(2) = 3 \cdot 2^{2-1} = 3 \cdot 2^1 = 6$$

$$t(3) = 3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$t(4) = 3 \cdot 2^{4-1} = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$$t(5) = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 48$$

La progresión es: $3, 6, 12, 24, 48, \dots$

Ejemplo 8 (una fórmula de recurrencia)

$$t(1) = 8, t(n+1) = t(n) \cdot \frac{1}{2}$$

$$t(1) = 8$$

$$t(2) = t(1) \cdot \frac{1}{2} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$t(3) = t(2) \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$t(4) = t(3) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$t(5) = t(4) \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La progresión es: $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$

Ejemplo 9

Halla una fórmula explícita y una fórmula de recurrencia para la progresión: $81, 27, 9, 3, \dots$

Explícita: $a_1 = 81, b = \frac{1}{3}$ así que a_0 (el término cero) es hallado por $a_0 = 81 \div \frac{1}{3} = 243$ y la

ecuación es: $a_n = a_0 \cdot b^n = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, o también $t(n) = 243 \cdot \frac{1}{3}^n$

De recurrencia: $t(1) = 81, t(n+1) = t(n) \cdot \frac{1}{3}$

Problemas

Cada una de las funciones a continuación define una progresión. Menciona los cinco primeros términos de cada progresión y define si es aritmética, geométrica, ambas, o ninguna.

1. $t(n) = 5n + 2$ 2. $s_n = 3 - 8n$ 3. $u(n) = 9n - n^2$ 4. $t(n) = (-4)^n$
5. $s(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 6. $u(n) = n(n + 1)$ 7. $t(n) = 8$ 8. $s_n = \frac{3}{4}n + 1$

Indica si cada una de las progresiones a continuación es aritmética o geométrica. Luego escribe la ecuación que permite obtener los términos de la progresión.

9. 48, 24, 12, 6, 3, ... 10. -4, 3, 10, 17, 24, ... 11. 43, 39, 35, 31, 27, ...
12. $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{32}, \frac{27}{128}, \dots$ 13. 5, -5, 5, -5, 5, ... 14. 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, ...

Grafica las siguientes progresiones en el mismo grupo de ejes.

15. $t(n) = -6n + 20$ 16. 1, 4, 16, 64, ...
17. ¿Las dos progresiones de los últimos dos problemas tienen algún término en común? Explica cómo lo sabes.
18. Cada año desde 1548, la altura promedio de un hombre ha aumentado ligeramente. La nueva altura es 100.05% la altura del año anterior. Si la altura promedio de un hombre en 1548 era de 54 pulgadas, ¿cuál era la altura promedio de un hombre en 2008?
19. Davis tiene \$5.40 en su cuenta bancaria en su cuarto cumpleaños. Si sus padres añaden \$0.40 a esta cuenta todas las semanas, ¿cuándo tendrá suficiente dinero para comprar el nuevo auto de carreras Smokin' Derby que tiene un valor de \$24.99?
20. Describe completamente el gráfico de la progresión $t(n) = -4n + 18$.

Progresiones aritméticas

Menciona los cinco primeros términos de cada una de las siguientes progresiones aritméticas.

21. $t(n) = 5n - 2$

22. $t(n) = -3n + 5$

23. $t(n) = -15 + \frac{1}{2}n$

24. $t(n) = 5 + 3(n - 1)$

25. $t(1) = 5, t(n + 1) = t(n) + 3$

26. $t(1) = 5, t(n + 1) = t(n) - 3$

27. $t(1) = -3, t(n + 1) = t(n) + 6$

28. $t(1) = \frac{1}{3}, t(a + 1) = t(n) + \frac{1}{2}$

Halla el 30° término de cada una de las siguientes progresiones aritméticas.

29. $t(n) = 5n - 2$

30. $t(n) = -15 + \frac{1}{2}n$

31. $t(31) = 53, d = 5$

32. $t(1) = 25, t(n + 1) = t(n) - 3$

Halla una fórmula explícita y una fórmula de recurrencia para cada una de las siguientes progresiones aritméticas.

33. $4, 8, 12, 16, 20, \dots$

34. $-2, 5, 12, 19, 26, \dots$

35. $27, 15, 3, -9, -21, \dots$

36. $3, 3\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 4, 4\frac{1}{3}, \dots$

Las progresiones se grafican usando puntos de la forma: (número de término, valor de término). Por ejemplo, la progresión $4, 9, 16, 25, 36, \dots$ se grafica marcando los puntos $(1, 4), (2, 9), (3, 16), (4, 25), (5, 36), \dots$. Las progresiones se grafican como puntos no conectados.

37. Grafica las progresiones de los problemas 21 y 22, y halla la pendiente de cada recta.

38. ¿Cómo se relaciona la pendiente de la recta hallada en el problema anterior con la progresión?

Progresiones geométricas

Menciona los cinco primeros términos de cada una de las siguientes progresiones geométricas.

39. $t(n) = 5 \cdot 2^n$

40. $t(n) = -3 \cdot 3^n$

41. $t(n) = 40\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

42. $t(n) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

43. $t(1) = 5, t(n+1) = t(n) \cdot 3$

44. $t(1) = 100, t(n+1) = t(n) \cdot \frac{1}{2}$

45. $t(1) = -3, t(n+1) = t(n) \cdot (-2)$

46. $t(1) = \frac{1}{3}, t(n+1) = t(n) \cdot \frac{1}{2}$

Halla el 15° término de cada una de las siguientes progresiones geométricas.

47. $t(14) = 232, r = 2$

48. $t(16) = 32, r = 2$

49. $t(14) = 9, r = \frac{2}{3}$

50. $t(16) = 9, r = \frac{2}{3}$

Halla una fórmula explícita y una fórmula de recurrencia para cada una de las siguientes progresiones geométricas.

51. 2, 10, 50, 250, 1250, ...

52. 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, ...

53. 5, 15, 45, 135, 405, ...

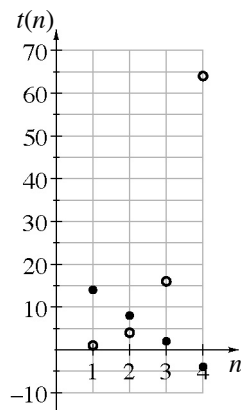
54. 3, -6, 12, -24, 48, ...

55. Grafica las progresiones de los problemas 39 y 52. Recuerda la nota incluida antes del problema 37 sobre la forma en que se grafican las progresiones.

56. ¿En qué se diferencian los gráficos de progresiones geométricas de los gráficos de progresiones aritméticas?

Respuestas

1. 7, 12, 17, 22, 27, aritmética, la diferencia común es 5.
2. $-5, -13, -21, -29, -37$, aritmética, la diferencia común es -8 .
3. 8, 14, 18, 20, 20, ninguna
4. $-4, 16, -64, 256, -1024$, geométrica, la razón común es -4 .
5. $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}$, geométrica, la razón común es $\frac{1}{4}$.
6. 2, 6, 12, 20, 30, ninguna.
7. 8, 8, 8, 8, 8, 8, ambas, la diferencia común es 0, la razón común es 1.
8. $\frac{7}{4}, \frac{5}{2}, \frac{13}{4}, 4, \frac{19}{4}$, aritmética, la diferencia común es $\frac{3}{4}$.
9. geométrica, $t(n) = 96\left(\frac{1}{2}\right)^n$
10. aritmética, $t(n) = 7n - 11$
11. aritmética, $t(n) = -4n + 47$
12. geométrica, $t(n) = \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n$
13. geométrica, $t(n) = -5(-1)^n$
14. geométrica, $t(n) = 100\left(\frac{1}{10}\right)^n$
15. Ver los puntos del gráfico.
16. Ver los círculos del gráfico.
17. No, no lo tienen. El gráfico es discreto, o solo puntos que son los términos de cada progresión. Ya que no comparten ningún punto común, no tienen ningún término en común.
18. En 2008, $54(1.0005)^{460} \approx 67.96$ pulgadas.
19. $t(n) = 0.4n + 5.4$, así que resuelve $0.4n + 5.4 \geq 24.99$. $n = 48.975$. En 49 semanas tendrá \$25. Si debe pagar impuestos, necesitará otras tres o cuatro semanas.
20. Esta es una función que representa una progresión aritmética, el gráfico es discreto pero los puntos son lineales. El dominio está compuesto por todos los números enteros positivos: 1, 2, 3, El rango es la progresión misma: 14, 10, 6, 2, -2 , No hay asíntotas.



21. 3, 8, 13, 18, 23
22. 2, -1, -4, -7, -10
23. $-14\frac{1}{2}$, -14, $-13\frac{1}{2}$, -13, $-12\frac{1}{2}$
24. 5, 8, 11, 14, 17
25. 5, 8, 11, 14, 17
26. 5, 2, -1, -4, -7
27. -3, 3, 9, 15, 21
28. $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{5}{6}$, $2\frac{1}{3}$
29. 148
30. 0
31. 48
32. -62
33. $t(n) = 4n$; $t(1) = 4$, $t(n + 1) = t(n) + 4$
34. $t(n) = 7n - 9$; $t(1) = -2$, $t(n + 1) = t(n) + 7$
35. $t(n) = 39 - 12n$; $t(1) = 27$,
 $t(n + 1) = t(n) - 12$
36. $a_n = \frac{1}{3}n + 2\frac{2}{3}$; $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}$
37. Gráfico (21): (1, 3), (2, 8), (3, 13), (4, 18), (5, 23) pendiente = 5
Gráfico (22): (1, 2), (2, -1), (3, -4), (4, -7), (5, -10) pendiente = -3
38. La pendiente de la recta que contiene los puntos es igual a la diferencia común de la progresión.
39. 10, 20, 40, 80, 160
40. -9, -27, -81, -243, -729
41. 40, 20, 10, 5, $\frac{5}{2}$
42. 6, -3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$
43. 5, 15, 45, 135, 405
44. 100, 50, 25, $\frac{25}{2}$, $\frac{25}{4}$
45. -3, 6, -12, 24, -48
46. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{48}$
47. 464
48. 16
49. 6
50. $\frac{27}{2}$
51. $t(n) = \frac{2}{5} \cdot 5^n$; $t(1) = 2$, $t(n + 1) = t(n) \cdot 5$
52. $t(n) = 64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$; $t(1) = 16$,
 $t(n + 1) = t(n) \cdot \frac{1}{4}$
53. $t(n) = \frac{5}{3} \cdot 3^n$; $t(1) = 5$, $t(n + 1) = t(n) \cdot 3$
54. $t(n) = \frac{-3}{2} \cdot (-2)^n$; $t(1) = 3$,
 $t(n + 1) = t(n) \cdot (-2)$
55. Gráfico (39): (1, 10), (2, 20), (3, 40), (4, 80), (5, 160)
Gráfico (52): (1, 16), (2, 4), (3, 1), (4, $\frac{1}{4}$), (5, $\frac{1}{16}$)
56. Las progresiones aritméticas son lineales y las progresiones geométricas son curvas (exponenciales).

PATRONES DE CRECIMIENTO EN TABLAS Y GRÁFICOS

5.3.1

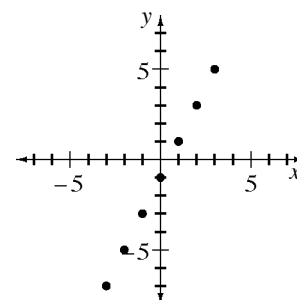
Para determinar si una función es lineal, exponencial o ninguna, observa las diferencias de los valores y para valores de x que sean enteros consecutivos. Si la diferencia es constante, el gráfico es lineal. Si la diferencia no es constante, observa el patrón de los valores de y . Si puedes usar un multiplicador constante para pasar de un valor de y al siguiente, la función es exponencial (observa que puedes usar el mismo multiplicador para pasar de diferencia a diferencia en una función exponencial).

Ejemplos

Identifica la forma del gráfico en función de cada tabla.

Ejemplo 1

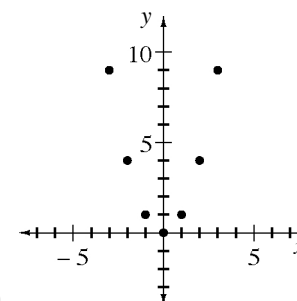
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5
		2	2	2	2	2	2



La diferencia entre valores de y es siempre dos, una constante.
La función es lineal; el gráfico a la derecha confirma esto.

Ejemplo 2

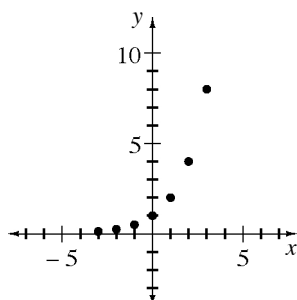
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9
		-5	-3	-1	1	3	5



La primera diferencia entre valores de y no es constante, y no hay un multiplicador constante que permita pasar de un valor de y al siguiente.
La función no es ni lineal ni exponencial; el gráfico a la derecha confirma esto.

Ejemplo 3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



Los valores de y tienen un multiplicador constante de 2 (y la diferencia entre los valores de y tiene un multiplicador constante de 2.) La función es exponencial; el gráfico a la derecha confirma esto.

Problemas

En función del crecimiento (la diferencia entre valores de y) mostrado en las tablas a continuación, identifica si el gráfico correspondiente es lineal, exponencial o ninguno de los dos.

1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	14	10	6	2	-2	-6	-10

2.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

3.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	21	12	5	0	-3	-4	-3

4.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2

5.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-14	-9	-4	1	6	11	16

6.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	-6	-2	0	2	6	18

7.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	8	16	32	64	128	256

8.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

9.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	30	20	12	6	2	0	0

10.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	11	9	7	5	3	1	-1

11.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81

12.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-27	-9	-3	0	3	9	27

13.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	5	8	9	8	5	0

14.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3	8	15

15.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1	0	-1	-2	-1	0	1

16.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$	9	18	36	72

Respuestas

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1. lineal | 2. exponencial |
| 3. ninguno | 4. lineal |
| 5. lineal | 6. ninguno |
| 7. exponencial | 8. exponencial |
| 9. ninguno | 10. lineal |
| 11. exponencial | 12. ninguno |
| 13. ninguno | 14. ninguno |
| 15. ninguno | 16. exponencial |

La recta de mejor ajuste puede modelar una asociación entre dos variables. En esta lección, las líneas de mejor ajuste son estimadas dibujándolas en un diagrama de dispersión. En las próximas lecciones de este capítulo usaremos diversas tecnológicas.

Una vez hallada la recta de mejor ajuste, podemos establecer su pendiente y su punto de corte con el eje y . En análisis estadístico, la pendiente suele escribirse como el cambio esperado en la variable dependiente (Δy) cuando la variable independiente cambia en una unidad ($\Delta x = 1$). El punto de corte con el eje y es el valor que se predice que tendrá la variable dependiente cuando la variable independiente sea cero. Ten cuidado. En los diagramas de dispersión estadísticos, el eje vertical suele no ser dibujado en el origen, así que el punto de corte con el eje y puede hallarse en un lugar que no sea donde la recta de mejor ajuste atraviesa el eje vertical del diagrama de dispersión.

Las asociaciones entre dos variables suelen ser descritas por medio de su forma, dirección, fuerza, y sus valores típicos. La forma es el patrón formado en el diagrama de dispersión: lineal, algún tipo de curva, o tal vez ninguno. La dirección indica si, en general, el patrón aumenta (de izquierda o derecha) o disminuye. En las relaciones lineales, la pendiente puede ser usada para describir la inclinación y la dirección. La fuerza de la relación indica cuánto se ajustan los datos a la forma establecida. Los valores atípicos son puntos de datos alejados de la mayor parte de los datos.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 4.1.1, 4.2.1, y 6.1.2, y el Punto de comprobación 8 al final del libro (observa que los problemas dados a continuación no requieren el uso de una calculadora gráfica, pero los problemas del Punto de comprobación 8 suponen que usarás una.

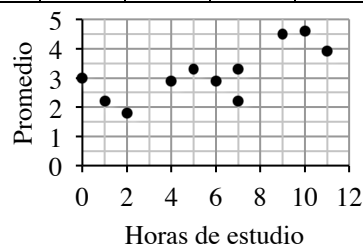
Comenzaremos a usar calculadoras gráficas para realizar cálculos estadísticos en la Lección 6.1.4).

Ejemplo

Parece razonable que exista una relación entre el tiempo que un alumno pasa estudiando y su promedio. Supón que quieres predecir el promedio de un alumno en función de la cantidad de horas que pasa estudiando cada semana. Pudiste seleccionar aleatoriamente 12 alumnos y obtener la siguiente información de cada uno:

Horas de estudio	4	5	11	1	15	2	10	6	7	0	7	9
Promedio	2.9	3.3	3.9	2.2	4.1	1.8	4.6	2.9	2.2	3	3.3	4.5

- a. Crea un diagrama de dispersión sin usar una calculadora.

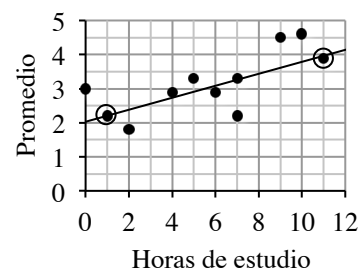


El ejemplo continúa en la página siguiente →

Continuación del ejemplo de la página anterior.

- b. Estima una recta de mejor ajuste, trázala con una regla y determina su ecuación.

Siempre que sea razonable, traza la recta de mejor ajuste a través de un punto de intersección con la red o un punto de datos. Así será más fácil escribir la ecuación. En este problema, los puntos de datos (1, 2.2) y (11, 3.9) parecen hallarse en una recta que “se ajusta” a los datos.



Si tomamos esos dos puntos y usamos las técnicas dadas en la Lección 2.3.2, la ecuación de la recta de mejor ajuste estimada es $y = 2.03 + 0.17x$, donde y es el promedio predicho y x es la cantidad de horas que los alumnos pasan estudiando cada semana. Observa que definimos las variables y sus unidades.

- c. Interpreta la pendiente y el punto de corte con el eje y en términos de horas de estudio y promedio.

La pendiente indica que se espera que el promedio de un alumno aumente 0.17 puntos por cada hora de estudio adicional a la semana. El punto de corte con el eje y predice que los alumnos que no estudien para nada tendrán un promedio de 2.03.

- d. Describe la asociación.

Describir una asociación significa describir su forma, dirección, fuerza y valores atípicos. La forma parece ser lineal; no parece ser curva o un grupo de puntos dispersos en forma aleatoria. La dirección es positiva; cuanto más estudian los alumnos, mayor es su promedio. Se espera que el promedio de un alumno aumente 0.17 puntos por cada hora de estudio adicional a la semana. La fuerza es moderada; es lo suficientemente fuerte para permitirnos ver su forma fácilmente, pero hay puntos dispersos. No parece haber valores atípicos.

En resumen, uno podría decir que existe una relación lineal moderadamente fuerte entre las horas de estudio y el promedio de los alumnos, sin valores atípicos.

Problemas

1. Parece razonable que la potencia de un automóvil esté relacionada con el rendimiento del combustible. Supón que seleccionamos una muestra aleatoria de 10 automóviles y registramos su potencia del motor y el rendimiento del combustible en ciudad.

Potencia (hp)	197	170	166	230	381	438	170	326	451	290
Rendimiento (mpg)	16	24	19	15	13	20	21	11	10	15

- Crea un diagrama de dispersión de los datos.
- Estima una recta de mejor ajuste y escribe su ecuación.
- Interpreta la pendiente y el punto de corte con el eje y en términos de hp y mpg.
- Describe la asociación.

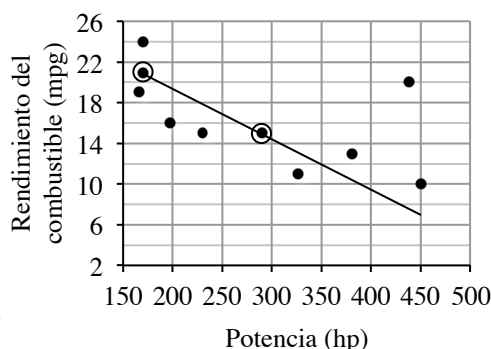
2. Muchas personas creen que los alumnos que son buenos en música también son buenos en matemáticas, pero el director de la Escuela Secundaria University se pregunta si existe esa misma conexión entre los alumnos de música y los de literatura. El director examinó los registros del último año y encontró 10 alumnos que tomaron clases avanzadas de música y de literatura. Comparó las calificaciones que obtuvieron en sus exámenes finales.

Calificaciones finales	
Música	Literatura
88	63
74	96
82	86
64	90
97	68
90	90
82	78
72	74
78	96
62	79
Total: 789	Total: 820

- Crea un diagrama de dispersión de los datos.
- Estima una recta de mejor ajuste y escribe su ecuación.
- Interpreta la pendiente y el punto de corte con el eje y en contexto.
- Describe la asociación.

Respuestas

- Observa el diagrama de la derecha.
 - Las respuestas pueden variar. Si ignoras el posible valor atípico en (438, 20), una recta razonable podría ser la que atraviesa los puntos (170, 21) y (290, 15). Si aplicamos las técnicas dadas en la Lección 2.3.2, la ecuación de la recta de mejor ajuste es $y = 29.5 - 0.05x$.



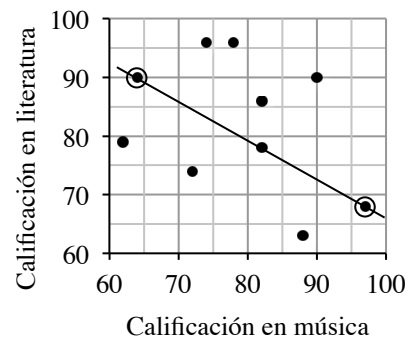
- Por cada caballo de fuerza adicional, se espera que el rendimiento del combustible disminuya en 0.05 mpg. El punto de corte con el eje y significa que un auto con 0 caballos de fuerza tendrá un rendimiento de 29.5 mpg, lo que no tiene sentido. El eje y se encuentra muy alejado de los datos, así que representa una extrapolación. Todos los modelos de predicción se vuelven poco confiables cuando los extrapolamos.
- Si eliminamos el valor atípico en (438, 20), parece haber una fuerte relación lineal negativa. Si no eliminamos el valor atípico, la asociación es más moderada (no tan fuerte). Por cada caballo de fuerza adicional, se espera que el rendimiento del combustible disminuya en 0.05 mpg.

2. a. Observa el diagrama de la derecha.

b. Las respuestas pueden variar. Una recta razonable puede ser la que atraviesa los puntos (64, 90) y (97, 68). Si aplicamos las técnicas dadas en la Lección 2.3.2, la ecuación de la recta de mejor ajuste es $y = 132.7 - 0.67x$.

c. Cada punto adicional en la calificación en música resulta en una disminución de 0.67 puntos en la calificación en literatura. El punto de corte con el eje y significa que un alumno que obtuvo un 0 en el examen de música debería obtener 133 puntos en el examen de literatura. Esto no tiene sentido. El eje y se encuentra muy alejado de los datos, así que representa una extrapolación. Todos los modelos de predicción se vuelven poco confiables cuando los extrapolamos.

d. Hay una gran dispersión alrededor de la recta de mejor ajuste. La relación lineal es débil. Cada punto adicional en la calificación en música resulta en una disminución de 0.67 puntos en la calificación en literatura. No parece haber valores atípicos.



VALORES RESIDUALES Y COTAS SUPERIORES E INFERIORES

6.1.2 y 6.1.3

Los valores residuales son una medida de la distancia entre los puntos de datos y la recta de mejor ajuste. Los valores residuales se miden en dirección vertical (y) desde el punto de datos hasta la recta. Un valor residual puede ser calculado de la siguiente forma:

$$\text{valor residual} = \text{valor real de } y - \text{valor esperado de } y.$$

Un valor residual positivo significa que el valor real es mayor que el valor predicho; un valor residual negativo significa que el valor real es menor que el valor predicho.

Una predicción hecha en función de una recta de mejor ajuste no indica la variabilidad en los datos originales. Las rectas de frontera superior e inferior son rectas paralelas que se trazan arriba y debajo de la recta de mejor ajuste. Fijan un límite superior e inferior (“margen de error”) a las predicciones hechas por la recta de mejor ajuste. Por ejemplo, predecir que la calificación de un alumno será 87 puntos es útil, pero predecir que su calificación será 87 ± 1 es muy distinto a predecir que será 87 ± 10 . Las rectas de frontera nos permiten poner límites como estos a las predicciones.

Las técnicas más usadas para hallar rectas de frontera superiores e inferiores exceden este curso. Sin embargo, podemos estimar razonablemente las cotas hallando el valor residual más alejado y luego sumando y restando esa distancia de la predicción.

Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 6.1.4. Para más ejemplo y ejercicio de práctica sobre los temas de este capítulo, consulta el material del Punto de comprobación 8. Observa que los problemas dados a continuación no requieren el uso de una calculadora gráfica, pero los problemas del Punto de comprobación 8 suponen que usarás una. Comenzaremos a usar calculadoras gráficas para realizar cálculos estadísticos en la Lección 6.1.4.

Ejemplo

Parece razonable que exista una relación entre el tiempo que un alumno pasa estudiando y su promedio. Supón que quieres predecir el promedio de un alumno en función de la cantidad de horas que pasa estudiando cada semana. Pudiste seleccionar aleatoriamente 12 alumnos y obtener la información a continuación de cada uno. Podemos estimar una recta de mejor ajuste cuya ecuación sea: $y = 2.03 + 0.17x$ (observa que se trata de los mismos datos que en el Ejemplo de la Lección 6.1.1 de esta *Guía para padres con práctica adicional*).

Horas	4	5	11	1	15	2	10	6	7	0	7	9
Promedio	2.9	3.3	3.9	2.2	4.1	1.8	4.6	2.9	2.2	3	3.3	4.5

- a. Halla el valor residual del alumno que estudió 10 horas e interprétalo en contexto. ¿Un alumno preferirá tener un valor residual positivo o negativo?

El ejemplo continúa en la página siguiente →

Continuación del ejemplo de la página anterior.

En función de la recta de mejor ajuste podemos predecir que un alumno que estudia 10 horas debería tener un promedio de $y = 2.03 + 0.17(10) = 3.73$. Pero ese alumno tiene, de hecho, un promedio de 4.6. El valor residual es:

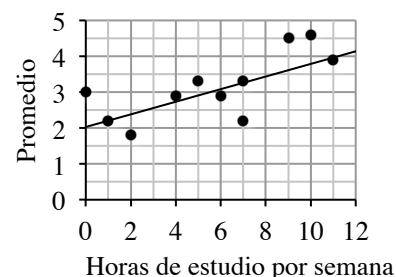
$$\begin{aligned} \text{valor residual} &= \text{valor real de } y - \text{valor esperado de } y \\ \text{valor residual} &= 4.6 - 3.73 = 0.87 \end{aligned}$$

El alumno que estudió 10 horas obtuvo un promedio 0.87 puntos más alto que el predicho. Un alumno preferirá tener un valor residual positivo porque eso significaría que obtuvo un promedio más alto del que se esperaba dada la cantidad de horas que dedica a estudiar.

- b. Escribe las ecuaciones de las rectas de frontera superior e inferior, y gráficalas en un diagrama de dispersión.

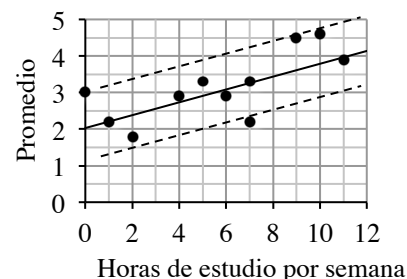
En el diagrama de dispersión, el valor residual más alto (la mayor distancia vertical, Δy) parece hallarse en el punto (7, 2.2). El promedio que se espera que tenga un alumno que estudia 7 horas es $y = 2.03 + 0.17(7) = 3.22$. El valor residual de este punto es:

$$\begin{aligned} \text{valor residual} &= \text{valor real de } y - \text{valor esperado de } y \\ \text{valor residual} &= 2.2 - 3.22 = -1.02 \end{aligned}$$



Las cotas son rectas paralelas a la recta de mejor ajuste, pero se hallan a una distancia de 1.02 por encima y por debajo de ella. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente que la recta de mejor ajuste, pero los puntos de corte con el eje y de las rectas de frontera serán iguales al punto de corte con el eje y de la recta de mejor ajuste más o menos 1.02.

Por lo tanto, la recta de frontera superior es:
 $y = (2.03 + 1.02) + 0.17x$ o $y = 3.05 + 0.17x$
 y la recta de frontera inferior es:
 $y = (2.03 - 1.02) + 0.17x$ o $y = 1.01 + 0.17x$.



- c. Predice las cotas superior e inferior del promedio de un alumno que estudia 8 horas por semana. ¿Es esta una predicción útil?

La cota inferior es $y = 1.01 + 0.17(8) = 2.37$, y la cota superior es $y = 3.03 + 0.17(8) = 4.41$. Predecimos que un alumno que estudia 8 horas por semana tiene un promedio de entre 2.37 y 4.41. Dada la gran variabilidad en los datos recabados, este es un rango amplio. La predicción no es muy útil.

Problemas

1. Parece razonable que la potencia de un automóvil esté relacionada con el rendimiento del combustible. Supón que seleccionamos una muestra aleatoria de 10 automóviles y registramos su potencia del motor y el rendimiento del combustible en ciudad. Se eliminó un valor atípico y se estimó la recta de mejor ajuste $y = 29.5 - 0.05x$ (observa que se trata de los mismos datos que en el problema 1 de la Lección 6.1.1 de esta *Guía para padres con práctica adicional*).

Potencia (hp)	197	170	166	230	381	170	326	451	290
Rendimiento (mpg)	16	24	19	15	13	21	11	10	15

- a. Halla el valor residual del automóvil con 381 caballos de fuerza e interprétalo en contexto. ¿El dueño de un automóvil preferirá un valor residual positivo o negativo?
- b. Elimina el valor atípico de tu conjunto de datos. Escribe las ecuaciones de las rectas de frontera superior e inferior, y gráficlas en un diagrama de dispersión.
- c. Predice cuáles serán la cota superior y la cota inferior del consumo de combustible de un automóvil con 300 caballos de fuerza. ¿Es esta una predicción útil?

2. Muchas personas creen que los alumnos que son buenos en música también lo son en matemáticas, pero el director de la Escuela Secundaria University se pregunta si existe esa misma conexión entre los alumnos de música y los de literatura. El director examinó los registros del último año y encontró 10 alumnos que tomaron clases avanzadas de música y de literatura. Comparó las calificaciones que obtuvieron en sus exámenes finales. Se estimó la recta de mejor ajuste: $y = 132.7 - 0.67x$ (observa que se trata de los mismos datos que en el problema 2 de la Lección 6.1.1 de esta *Guía para padres con práctica adicional*).

Calificaciones finales	
Música	Literatura
88	63
74	96
82	86
64	90
97	68
90	90
82	78
72	74
78	96
62	79
Total: 789	Total: 820

- a. El director observó los registros de una alumna que acaba de ingresar a la escuela. Esta nueva alumna obtuvo una calificación perfecta de 100 en el examen final de literatura y su valor residual era de 30 puntos. ¿Cuál podía predecirse que sería su calificación en literatura? ¿Cuál fue su calificación en música?
- b. Escribe las ecuaciones de las rectas de frontera superior e inferior y gráficlas en un diagrama de dispersión. No incluyas a la nueva alumna del punto (a) en tu diagrama de dispersión.
- c. Predice cuáles serán la cota superior y la cota inferior de la calificación de literatura de un alumno que obtuvo una calificación perfecta de 100 en el examen final de música. ¿Es esta una predicción útil?

Respuestas

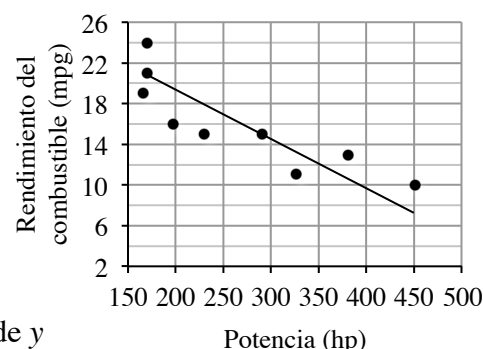
1. a. En función de la recta de mejor ajuste, un vehículo con 381 caballos de fuerza debería tener un rendimiento de $y = 29.5 - 0.05(381) \approx 10.5$. Pero este vehículo de hecho obtiene 13 mpg. El valor residual es:

$$\begin{aligned} \text{valor residual} &= \text{valor real de } y - \text{valor esperado de } y \\ \text{valor residual} &= 13 - 10.5 = 2.5 \end{aligned}$$

El vehículo con 381 caballos de fuerza obtuvo 2.5 mpg más que lo predicho. El dueño de un automóvil preferirá un valor residual positivo, ya que esto significa que obtendrá más millas por galón de lo predicho en función de sus caballos de fuerza.

- b. En el diagrama de dispersión del que se ha eliminado el valor atípico, el valor residual más alto (la mayor distancia vertical, Δy) parece hallarse en el punto (197, 16). El rendimiento predicho de un automóvil con 197 caballos de fuerza es $y = 29.5 - 0.05(197) = 19.7$ mpg. El valor residual de este punto es:

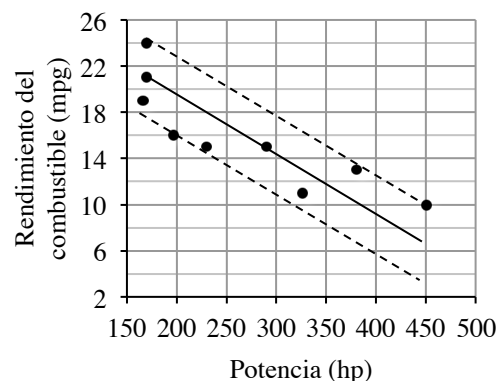
$$\begin{aligned} \text{valor residual} &= \text{valor real de } y - \text{valor esperado de } y \\ \text{valor residual} &= 16 - 19.7 = -3.7 \end{aligned}$$



Las cotas son rectas paralelas a la recta de mejor ajuste, pero se hallan a una distancia de 3.7 por encima y por debajo de ella. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente que la recta de mejor ajuste, pero los puntos de corte con el eje y de las rectas de frontera serán iguales al punto de corte con el eje y de la recta de mejor ajuste más o menos 3.7.

Por lo tanto, la recta de frontera superior es: $y = (29.5 + 3.7) - 0.05x$ o $y = 33.2 - 0.05x$, y la recta de frontera inferior es: $y = (29.5 - 3.7) - 0.05x$ o $y = 25.8 - 0.05x$.

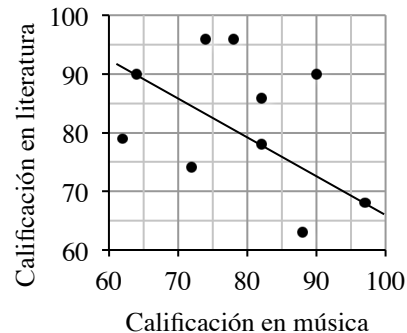
- c. La cota superior es $y = 33.2 - 0.05(300) = 18.2$, y la cota inferior es $y = 25.8 - 0.05(300) = 10.8$. Predecimos que un auto con 300 caballos de fuerza tendrá un rendimiento de entre 10.8 y 18.2 mpg. La predicción podría ser útil: indica que este auto tiene un bajo rendimiento.



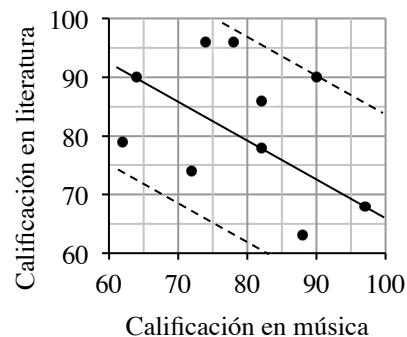
2. a. valor residual = valor real de y – valor esperado de y
 $30 = 100 - \text{valor esperado de } y$
 valor esperado de $y = 100 - 30 = 70$

En función de la recta de mejor ajuste la calificación en música será:
 $70 = 132.7 - 0.67x$ o $x \approx 94$. Podría predecirse que obtendría una calificación de 70 puntos en literatura y su calificación en música fue 94.

- b. En el diagrama de dispersión, el valor residual más alto (la mayor distancia vertical, Δy) parece hallarse en el punto (90, 90). La calificación en literatura predicha para un alumno que obtuvo 90 puntos en el examen de música es $y = 132.7 - 0.67(90) = 72.4$. El valor residual de este punto es $90 - 72.4 = 17.6$. Por lo tanto, la recta de frontera superior es:
 $y = (132.7 + 17.6) - 0.67x$ o $y = 150.3 - 0.67x$,
 y la recta de frontera inferior es:
 $y = (132.7 - 17.6) - 0.67x$ o $y = 115.1 - 0.67x$.



- c. La cota superior es $y = 150.3 - 0.67(100) = 83.3$, y la cota inferior es $y = 115.1 - 0.67(100) = 48.1$. Predecimos que un alumno con una calificación de 100 en el examen final de música obtendrá entre 48 y 83 puntos en el examen final de literatura. Este rango es demasiado grande para ser útil. Hay mucha variabilidad en los datos recabados por el director, lo que hace que el margen de error de la predicción sea demasiado grande.



LÍNEA DE REGRESIÓN DE MÍNIMOS CUADRADOS**6.1.4**

Una **línea de regresión de mínimos cuadrados (LRMC)** es una recta de mejor ajuste que minimiza la suma de los cuadrados de los valores residuales.

Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 6.2.1 y el Punto de comprobación 8 al final del libro. Observa también el problema 6-34 del libro para aprender a hallar una línea de regresión de mínimos cuadrados. Para más ejemplos y ejercicios de práctica sobre los temas de este capítulo, consulta los problemas del Punto de comprobación 8.

CALCULADORAS

Las calculadoras o softwares estadísticos pueden hallar fácilmente la LRMC y los valores residuales. Los alumnos pueden usar una calculadora TI-83/84+ si disponen de una. Puedes consultar los detalles sobre el uso de calculadoras en la Introducción de esta *Guía para padres con práctica adicional*.

También hay una herramienta electrónica disponible en tu libro digital o studenthelp.cpm.org para los alumnos que no dispongan de una calculadora gráfica.

NOTAS SOBRE LAS CALCULADORAS TI-83/84+

Puedes hallar instrucciones detalladas para el uso de una calculadora TI-83+/84+ en tu libro digital o studenthelp.cpm.org. Algunas instrucciones básicas:

Para el punto (a) del ejemplo:

- Ingresa los puntos de datos en dos listas.
- El *total* incluido en algunas tablas de datos es usado para verificar si los datos fueron ingresados correctamente en la calculadora. Usa 1-Var Stats y verifica que Σx en la calculadora concuerde con el “total” dado al final de la tabla en algunos problemas. Σx es la “suma de x ”, o la suma de los valores en la lista.
- Usa 1-Var Stats para hallar los valores máximos y mínimos de ambas listas, luego configura la ventana adecuadamente.
- Usa $\boxed{2\text{nd}} \boxed{[\text{STAT PLOT}]}$ para crear un gráfico y luego presiona $\boxed{[\text{GRAPH}]}$.

Para el punto (b) del ejemplo:

- Halla la LRMC presionando ... “CALC” “8:LinReg(a+bx)” $\boxed{2\text{nd}} \boxed{[L1]} \boxed{,}$ $\boxed{2\text{nd}} \boxed{[L2]} \boxed{,}$ $\boxed{[\text{VARS}]}$ “Y-VARS” “1:Function” “1:Y₁” $\boxed{[\text{ENTER}]}$.
- Usa $\boxed{2\text{nd}} \boxed{[\text{WINDOW}]}$ para establecer la escala del gráfico y luego presiona $\boxed{[\text{GRAPH}]}$.

Para el punto (c) del ejemplo:

Siempre que crees una LRMC, la calculadora almacenará los valores residuales en una lista llamada “RESID”. Puedes ver los valores residuales en la Lista 3 de esta forma:

- Resalta la etiqueta de la Lista 3 y presiona $\boxed{[\text{ENTER}]}$.
- Presiona $\boxed{2\text{nd}} \boxed{[\text{LIST}]} \boxed{[\text{“RESID”}]} \boxed{[\text{ENTER}]}$ para copiar la lista.

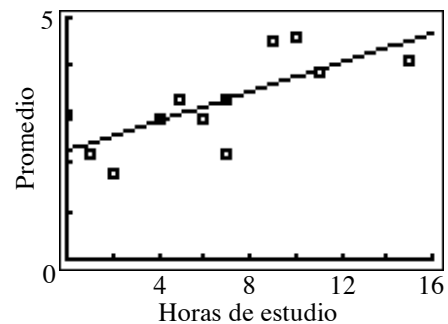
Ejemplo

Parece razonable que exista una relación entre el tiempo que un alumno pasa estudiando y su promedio. Supón que quieres predecir el promedio de un alumno en función de la cantidad de horas que pasa estudiando cada semana. Pudiste seleccionar aleatoriamente 12 alumnos y obtener la siguiente información de cada uno:

Horas de estudio	4	5	11	1	15	2	10	6	7	0	7	9
Promedio	2.9	3.3	3.9	2.2	4.1	1.8	4.6	2.9	2.2	3	3.3	4.5

- a. Usa tu calculadora gráfica para crear un diagrama de dispersión. Elige una ventana razonable en tu calculadora y luego grafica el diagrama en tu hoja y etiqueta los ejes.

Ya que las “horas” van de 0 a 15, una ventana apropiada puede tener un eje x con una escala del 0 al 16 y un intervalo de 2. Los promedios van de 1.8 a 4.6, así que un eje y adecuado podría tener una escala del 0 al 5 con un intervalo de 1. Observa que los ejes han sido etiquetados con el nombre de la variable y las unidades.



- b. Usa tu calculadora para hallar la ecuación de la LRMC.

La calculadora hallará la recta $y = 2.249 + 0.152x$. Cuando se tiene la ecuación de una LRMC es esencial definir las variables y sus unidades. En este caso, x es la cantidad de horas que un alumno pasa estudiando a la semana e y es el promedio que se predice que tendrá ese alumno.

- c. Usa tu calculadora para crear una lista de valores residuales. ¿Cuál es el valor residual del alumno que pasa 10 horas estudiando? Interpreta el valor residual en contexto.

Puedes ver una lista parcial de valores residuales a la derecha (Lista L3):

Según esta lista de valores residuales, el valor residual del alumno que estudió 10 horas es 0.83 puntos. Eso significa que obtuvo un promedio 0.83 puntos mayor de lo predicho por la línea de regresión de mínimos cuadrados.

L1	L2	L3	3
4	2.9	.04247	
5	3.3	.29041	
11	3.9	-.0219	
1	2.2	-.2014	
15	4.1	-.4301	
2	1.8	-.7534	
10	4.6	.83014	
L3(1)= .0424657534...			

Problemas

1. Parece razonable que la potencia de un automóvil esté relacionada con el rendimiento del combustible. Supón que seleccionamos una muestra aleatoria de 9 automóviles y registramos su potencia del motor y el rendimiento del combustible en ciudad.

Potencia (hp)	197	170	166	230	381	170	326	451	290
Rendimiento (mpg)	16	24	19	15	13	21	11	10	15

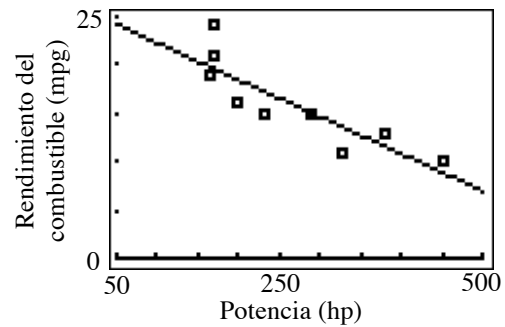
- a. Usa tu calculadora gráfica para crear un diagrama de dispersión. Elige una ventana razonable en tu calculadora y luego grafica el diagrama en tu hoja y etiqueta los ejes.
 - b. Usa tu calculadora para hallar la ecuación de la LRMC. ¿Cuál predices que será el rendimiento de un automóvil con 400 caballos de fuerza?
 - c. Usa tu calculadora para crear una lista de valores residuales. ¿Cuál es el valor residual del automóvil con 230 caballos de fuerza?
2. Muchas personas creen que los alumnos que son buenos en música también son buenos en matemáticas, pero el director de la Escuela Secundaria University se pregunta si existe esa misma conexión entre los alumnos de música y los de literatura. El director examinó los registros del último año y encontró 10 alumnos que tomaron clases avanzadas de música y de literatura. Comparó las calificaciones que obtuvieron en sus exámenes finales.

Calificaciones finales	
Música	Literatura
88	63
74	96
82	86
64	90
97	68
90	90
82	78
72	74
78	96
62	79
<i>Total: 789</i>	<i>Total: 820</i>

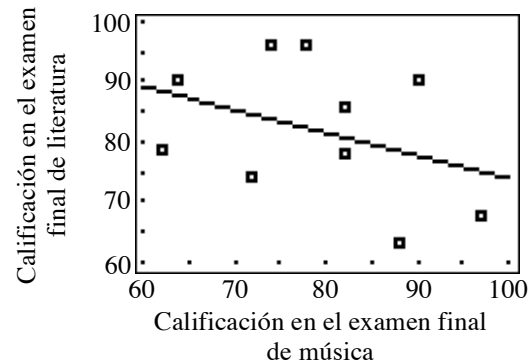
- a. Usa tu calculadora gráfica para crear un diagrama de dispersión. Elige una ventana razonable en tu calculadora y luego grafica el diagrama en tu hoja y etiqueta los ejes. ¿Recordaste usar el *total* para verificar que hayas ingresado los datos de forma correcta?
- b. Usa tu calculadora para hallar la ecuación de la LRMC.
- c. Usa tu calculadora para crear una lista de valores residuales. ¿Un alumno preferirá tener un valor residual positivo o negativo en esta situación?

Respuestas

1. a. Observa el diagrama de dispersión de la derecha.
- b. $y = 26.11 - 0.0382x$. y es el rendimiento esperado del combustible (en mpg) y x es la potencia (en hp). Podemos predecir que un automóvil con 400 caballos de fuerza tendrá un rendimiento de $26.11 - 0.0382(400) = 10.8$ mpg.
- c. El automóvil con 230 caballos de fuerza tenía un valor residual de -2.3 mpg. Eso significa que el automóvil tenía un rendimiento 2.3 mpg menor de lo predicho por la LRMC.



2. a. Observa el diagrama de dispersión de la derecha.
- b. $y = 112.1 - 0.3813x$, donde y es la calificación que se predice para el examen final de literatura y x es la calificación obtenida en el examen final de música.
- c. Puedes ver una lista parcial de valores residuales a continuación, en la Lista L3. Un alumno preferirá tener un valor residual positivo. Eso significaría que su calificación de literatura es más alta de lo predicho por la LRMC.



L1	L2	L3	3
88	63	-15.52	
74	96	12.132	
82	86	5.1821	
64	90	2.3183	
97	68	-7.098	
90	90	12.233	
82	78	-2.818	
L3(1) = -15.5299673...			

DIAGRAMAS DE VALOR RESIDUAL Y CORRELACIÓN

6.2.1, 6.2.2, y 6.2.4

Un **diagrama de valor residual** permite analizar qué tan adecuado es un modelo de mejor ajuste. Para más información sobre diagramas de valor residual, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 6.2.3.

El **coeficiente de correlación**, r , es una medida de la dispersión de los datos alrededor de la LRMC; es una medida de la fuerza de una asociación lineal. R -cuadrado puede ser interpretado como el porcentaje de cambio en la variable dependiente (y) justificado o explicado por el cambio en la variable independiente (x). Consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 6.2.4.

Para más información, consulta el Punto de comprobación 8 al final del libro. Para más ejemplos y ejercicios de práctica sobre los temas de este capítulo, consulta los problemas del Punto de comprobación 8.

CALCULADORAS

Las calculadoras o software estadísticos pueden realizar cálculos estadísticos con facilidad. Puedes consultar los detalles sobre el uso de calculadoras en la Introducción de esta *Guía para padres con práctica adicional*. Para más información sobre el uso de una calculadora TI-83/84+, consulta la sección anterior. Puedes hallar instrucciones detalladas para el uso de una calculadora TI-83+/84+ en tu libro digital o studenthelp.cpm.org.

Al calcular la LRMC, una calculadora indica el coeficiente de correlación en la misma pantalla en la que indica la pendiente y el punto de corte con el eje y . Si tu calculadora TI no calcula r , presiona $\boxed{2\text{nd}} \boxed{[\text{CATALOG}]} \text{“DiagnosticOn”} \boxed{[\text{ENTER}]} \boxed{[\text{ENTER}]}$ e inténtalo de nuevo.

Ejemplo

Parece razonable que exista una relación entre el tiempo que un alumno pasa estudiando y su promedio. Supón que quieres predecir el promedio de un alumno en función de la cantidad de horas que pasa estudiando cada semana. Pudiste seleccionar aleatoriamente 12 alumnos y obtener la siguiente información de cada uno:

Horas de estudio	4	5	11	1	15	2	10	6	7	0	7	9
Promedio	2.9	3.3	3.9	2.2	4.1	1.8	4.6	2.9	2.2	3	3.3	4.5

- a. Grafica los datos y la LRMC.

Observa el diagrama de dispersión de la derecha.

- b. Crea e interpreta un diagrama de valor residual.

Observa el diagrama de valor residual abajo a la derecha.

No hay ningún patrón aparente en el diagrama de valor residual—parecen puntos dispersos en forma aleatoria—lo que significa que un modelo lineal (en lugar de uno curvo) es la forma más adecuada de modelar la relación.

- c. Halla el coeficiente de correlación r y R -cuadrado. Interpreta el significado de R -cuadrado en contexto.

De acuerdo con la calculadora, $r \approx 0.7338$, R -cuadrado $\approx 53.8\%$. Cerca del 54% de la variabilidad en los promedios se puede explicar por una relación lineal con la cantidad de horas semanales de estudio.

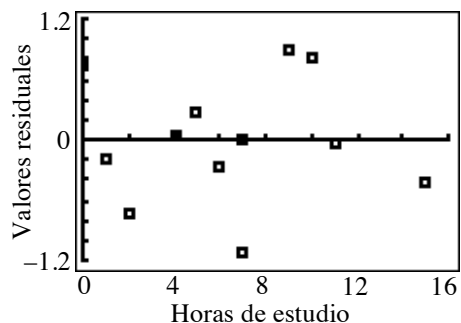
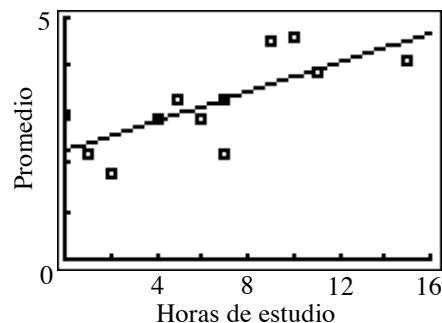
- d. Describe completamente la asociación entre los promedios y las horas de estudio.

Para más información sobre cómo describir completamente una asociación, consulta el Punto de comprobación 8 al final del libro. *Al describir una asociación, debemos describir su forma, dirección, fuerza, y valores atípicos.*

De acuerdo con la calculadora, la línea de regresión de mínimos cuadrados es $y = 2.249 + 0.152x$, donde y es el promedio predicho y x es la cantidad de horas de estudio.

La *forma* del diagrama de dispersión parece ser lineal; no parece ser curva ni tratarse de un simple grupo de puntos dispersos aleatoriamente. El diagrama de valor residual muestra una dispersión aleatoria, lo que confirma que el modelo lineal fue una elección adecuada.

La *dirección* es positiva; cuanto más estudian los alumnos, más altos son sus promedios. Dada la pendiente, se espera que el promedio de un alumno aumente 0.15 puntos por cada hora adicional de estudio por semana.



El ejemplo continúa en la página siguiente →

Continuación del ejemplo de la página anterior.

La *fuerza* es moderada: es lo suficientemente fuerte como para ver fácilmente su forma, pero existe una cierta dispersión alrededor de la recta. El coeficiente de correlación es 0.73, lo que confirma la existencia de una asociación lineal moderadamente fuerte. Dado el valor de *R*-cuadrado, 54% de la variabilidad en los promedios se puede explicar por la variabilidad en la cantidad de horas semanales de estudio.

No parece haber *valores atípicos*.

Problemas

1. Parece razonable que la potencia de un automóvil esté relacionadas con el rendimiento del combustible. Supón que seleccionamos una muestra aleatoria de 9 automóviles y registramos su potencia del motor y el rendimiento del combustible en ciudad.

Potencia (hp)	197	170	166	230	381	170	326	451	290
Rendimiento (mpg)	16	24	19	15	13	21	11	10	15

- a. Grafica los datos y la LRMC.
- b. Crea e interpreta un diagrama de valor residual.
- c. Halla el coeficiente de correlación r y *R*-cuadrado. Interpreta el significado de *R*-cuadrado en contexto.
- d. Describe completamente la asociación.

2. Muchas personas creen que los alumnos que son buenos en música también son buenos en matemáticas, pero el director de la Escuela Secundaria University se pregunta si existe esa misma conexión entre los alumnos de música y los de literatura. El director examinó los registros del último año y encontró 10 alumnos que tomaron clases avanzadas de música y de literatura. Comparó las calificaciones que obtuvieron en sus exámenes finales.

Calificaciones finales	
Música	Literatura
88	63
74	96
82	86
64	90
97	68
90	90
82	78
72	74
78	96
62	79
<i>Total: 789</i>	<i>Total: 820</i>

- a. Grafica los datos y la LRMC.
- b. Crea e interpreta un diagrama de valor residual.
- c. Halla el coeficiente de correlación r y *R*-cuadrado. Interpreta el significado de *R*-cuadrado en contexto.
- d. Describe completamente la asociación.

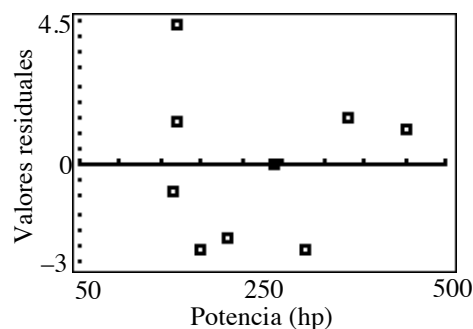
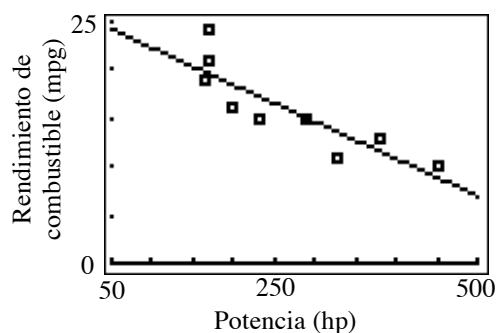
Respuestas

1. a. Observa el diagrama de dispersión de la derecha.
- b. Observa el diagrama de valor residual abajo a la derecha.

Parece haber un patrón con forma de U en el diagrama de valor residual, lo que sugiere que la forma más adecuada de modelar la relación es usando un modelo curvo (en lugar de una recta). Sin embargo, un examen visual del diagrama de dispersión y la LRMC demuestra que el uso de un modelo lineal no es completamente inapropiado. Continuaremos con el análisis del modelo lineal.

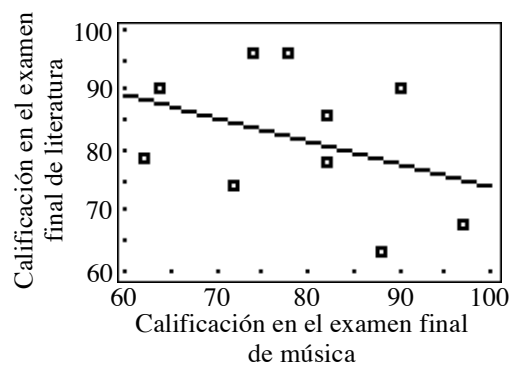
- c. $r \approx -0.8602$, R -cuadrado ≈ 0.7400 . Cerca del 74% de la variabilidad en el rendimiento de la gasolina se puede explicar por una relación lineal con los caballos de fuerza.

- d. De acuerdo con la calculadora, la línea de regresión de mínimos cuadrados es $y = 26.11 - 0.0382x$, donde y es el rendimiento predicho (en mpg) y x es la potencia (en hp). El diagrama de valor residual indica que un modelo curvo puede ser el que mejor se ajuste a los datos, pero al observar el diagrama de dispersión, la LRMC es un modelo suficientemente bueno de los datos como para permitirnos continuar. La asociación es negativa: el modelo predice que por cada caballo de fuerza adicional, el rendimiento disminuirá en 0.04 mpg. La asociación es bastante fuerte, con un coeficiente de correlación de casi -0.9 . Cerca del 74% de la variabilidad en el rendimiento de la gasolina se puede explicar por una relación lineal con la potencia. No parece haber valores atípicos (sin embargo, si has estado siguiendo este problema desde la Lección 6.1.1 de esta *Guía para padres con práctica adicional*, recordarás que los datos originales presentaban un valor atípico de 438 caballos de fuerza y 20 mpg. Ese punto no fue tenido en cuenta al crear la recta de mejor ajuste, y posteriormente el punto de datos fue eliminado del análisis. Si se incluyera ese punto, el coeficiente de correlación sería un valor más cercano a 0).

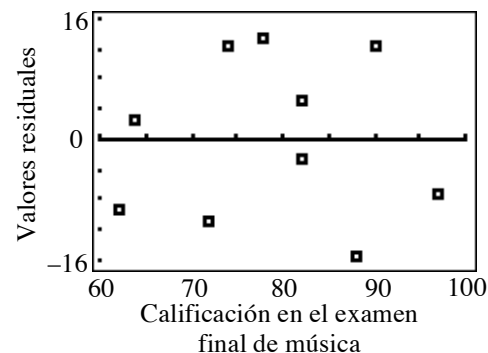


2. a. Observa el diagrama de dispersión de la derecha.
- b. Observa el diagrama de valor residual abajo a la derecha.

El diagrama de valor residual no parece presentar ningún patrón—parece tratarse de puntos dispersos en forma aleatoria—lo que significa que la forma más apropiada de modelar la relación es a través de un modelo lineal (en lugar de una curva).



- c. De acuerdo con la calculadora, $r \approx -0.3733$, R -cuadrado $\approx 13.9\%$. Cerca del 14% de la variabilidad en las calificaciones de literatura se puede explicar por una relación lineal con las calificaciones de música.
- d. La LRMC es $y = 112.1 - 0.3813x$, donde y es la calificación predicha en el examen de literatura y x es la calificación en el examen de música. El diagrama de valor residual confirma que podemos utilizar un modelo lineal. La asociación es negativa: el modelo predice que por cada punto adicional en la calificación de música, la calificación de literatura disminuirá 0.38 puntos. La asociación es muy débil, con un coeficiente de correlación de aproximadamente -0.37 . Ya que R -cuadrado es aproximadamente 14%, cerca del 14% de la variabilidad en las calificaciones de literatura se puede explicar por una relación lineal con las calificaciones de música. Los datos recabados no parecen presentar valores atípicos.



Dadas todas las herramientas estadísticas disponibles para medir la correlación entre dos variables, es muy tentador creer que una **asociación** fuerte entre dos variables demuestra la existencia de una relación de **causalidad**. El hecho de que dos variables se muevan juntas de forma predecible no demuestra que una cause la otra. La causalidad solo puede ser demostrada mediante experimentos cuidadosamente planificados, no observando la relación entre variables.

Ejemplo

Una ciudad propone crear una nueva ruta de autobuses. Una activista de la comunidad que es dueña de una casa en la ruta realiza algunas investigaciones que demuestran la existencia de una fuerte asociación entre la cantidad de paradas de autobús y los índices de criminalidad en una comunidad. Presenta sus conclusiones al concejo de la ciudad y afirma: “Las paradas de autobús causan crímenes, así que por favor voten no”. Otro activista de la comunidad que es dueño de un negocio en la ruta propuesta realiza también algunas investigaciones y descubre que las paradas de autobús están fuertemente asociadas con la cantidad de restaurantes en un vecindario. Presenta sus conclusiones al concejo de la ciudad y afirma: “Las paradas de autobús aumentan la cantidad de restaurantes. Por favor voten sí”.

Un miembro del consejo de la ciudad (que también es profesor de estadística) les informa a los demás miembros que asociación no es lo mismo que causalidad, porque existen miles de variables que no están incluidas (latentes) en un estudio. El miembro del concejo afirma que: “Las paradas de autobuses suelen ser más comunes en grandes centros urbanos, así que es común encontrar paradas de autobús con otros elementos asociados a la vida urbana. Esto no significa que las paradas de autobús *causen* las cosas halladas en las ciudades”.

- a. Menciona tres variables deseables que puedan estar asociadas con la cantidad de paradas de autobús pero no necesariamente sean causadas por ellas.

Cantidad de museos, teatros, estadios.

- b. Menciona tres variables indeseables que puedan estar asociadas con la cantidad de paradas de autobús pero no necesariamente sean causadas por ellas.

Cantidad de basura, contaminación del aire, ruido

Problemas

Para cada encabezado periodístico falso a continuación, acepta que la asociación es verdadera e indica una variable latente oculta que pueda ser la causa real de la relación.

- a. “LIBROS EN CASA ASOCIADOS CON MEJORES CALIFICACIONES”
“Los alumnos compran montones de libros antes de dar exámenes nacionales”.
- b. “CLUB DE AJEDREZ ASOCIADO CON UN AUMENTO DE LAS POSIBILIDADES DE SER ADMITIDO A UNIVERSIDADES DE PRIMER NIVEL”
“Presidente del club recibe montones de solicitudes de ingresos”.
- c. “LOS ESTUDIANTES QUE VIVEN FUERA DE LOS CAMPUS CORREN MÁS RIESGOS DE SUFRIR ACCIDENTES AUTOMOVILÍSTICOS”
“Advertencia de la policía estatal: no corran riesgos, vivan en el campus”.

Respuestas

- a. Es probable que una persona que lee mucho tenga más libros en su casa y obtenga mejores calificaciones en sus exámenes. Es probable que leer regularmente sea la causa. El solo acto de comprar libros no genera un aumento de las calificaciones.
- b. El ajedrez es un juego de estrategia y una actividad extracurricular. Quienes juegan al ajedrez regularmente pueden estar más inclinados a solicitar su admisión a universidades de primer nivel que quienes no juegan regularmente al ajedrez.
- c. Los alumnos que viven fuera del campus probablemente viajan a la escuela y pueden pasar más tiempo conduciendo desde y hacia la escuela que los alumnos que viven en el campus. Las horas adicionales de manejo pueden ser la causa del mayor número de accidentes.

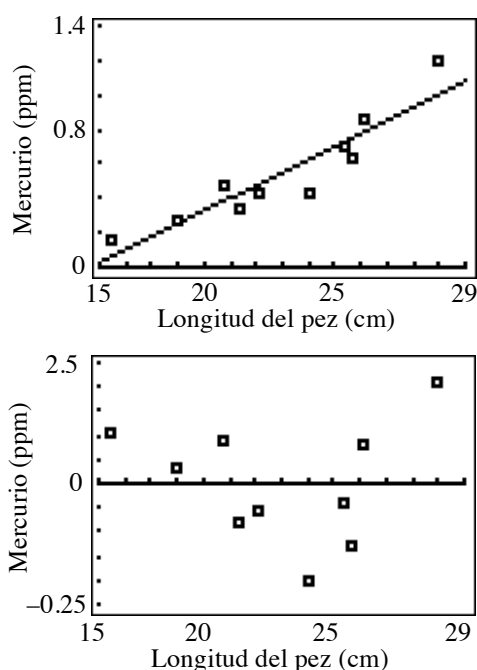
Muchas relaciones son modeladas mejor por una curva que por una recta. Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 6.2.5.

Ejemplo

El metilmercurio es una neurotoxina hallada en muchas especies de peces. El plancton absorbe mercurio de cursos de agua contaminada, los peces más pequeños comen el plancton y el metilmercurio viaja a lo largo de la cadena alimenticia hasta los depredadores más grandes. Generalmente, cuanto mayor sea el pez, mayor será la concentración de metilmercurio en su carne. Supón que un biólogo está tomando muestras de robalos blancos de un lago cuya agua sabe que está contaminada con mercurio a fin de hallar una relación entre el tamaño de los peces y la concentración de metilmercurio en su carne. Los siguientes datos fueron recabados de una muestra de 10 robalos blancos (ppm significa “partes por millón”):

Longitud (cm)	24.4	23.0	21.1	24.7	25.1	20.3	18.0	27.9	19.8	15.4
Mercurio (ppm)	0.689	0.428	0.425	0.629	0.863	0.340	0.281	1.20	0.474	0.164

Se calculó la LRMC y se creó el siguiente diagrama de dispersión y el siguiente diagrama de valor residual:



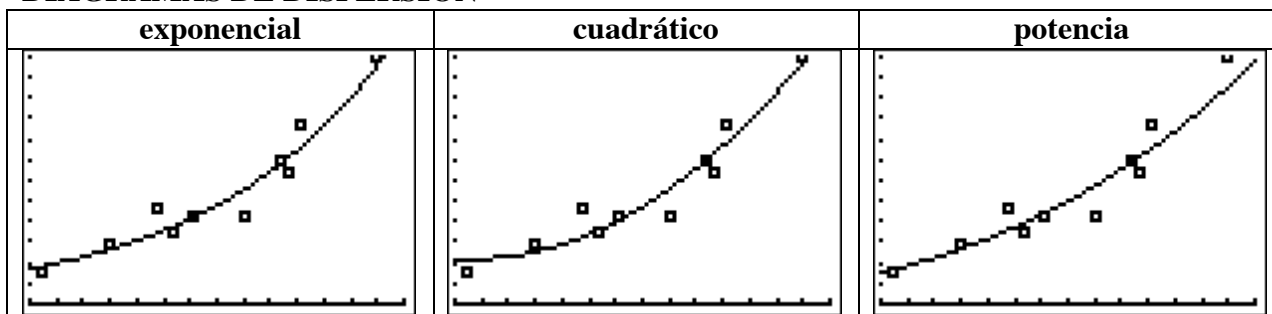
El patrón curvo en el diagrama de valor residual indica que un modelo no lineal se ajustaría mejor a los datos.

El ejemplo continúa en la página siguiente →

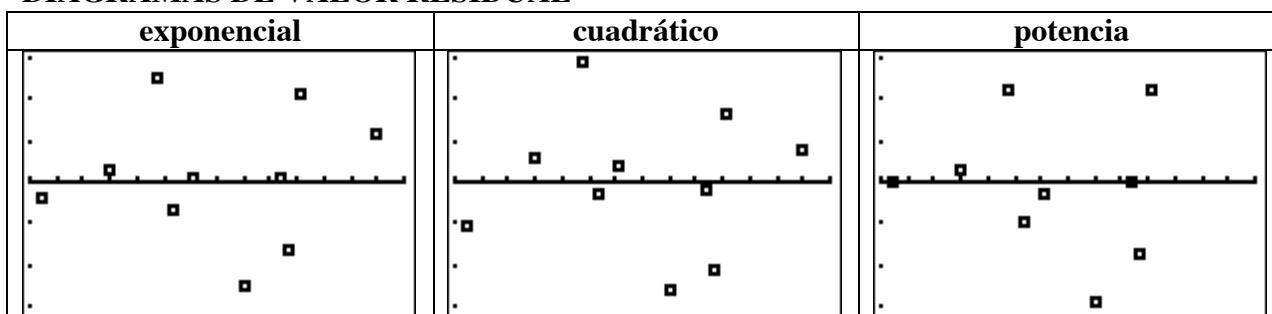
Continuación del ejemplo de la página anterior.

- a. Crea regresiones para los datos con modelos exponenciales, cuadráticos y de potencia, y grafica los diagramas de dispersión y valor residual correspondientes. Todas estas regresiones están disponibles en la calculadora TI-83/84+, en la misma pantalla que la regresión lineal.

DIAGRAMAS DE DISPERSIÓN



DIAGRAMAS DE VALOR RESIDUAL



- b. Usa los diagramas de valor residual para seleccionar el mejor modelo no lineal.

Intenta hallar el modelo con la menor dispersión o la dispersión que parezca más “aleatoria”. El modelo de potencia tiene un patrón en forma de U, por lo que no es una buena opción.

Tanto el modelo exponencial como el cuadrático parecen bastante aleatorios; cualquiera sería una elección adecuada dados los diagramas. Pero un crecimiento sucesivo como este—en este caso, el aumento de los niveles de mercurio a medida que el pez envejece y se vuelve más grande—puede ser explicado mejor por una relación exponencial que por una cuadrática. El modelo exponencial es una buena opción para describir la asociación entre la longitud de un pez y la concentración de mercurio.

- c. Usa tu modelo para predecir la cantidad de mercurio en un pez de 20 cm.

$y = 0.0187 \cdot 1.1588^x$ donde x es la longitud del pez en cm e y es la concentración de mercurio en partes por millón. Si $x = 20$ cm, entonces $y = 0.356$. Se espera que un pez de 20 cm contenga 0.356 ppm de mercurio.

Problema

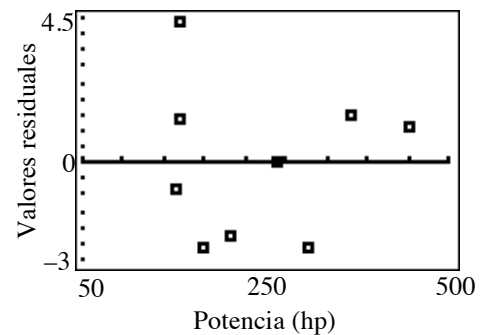
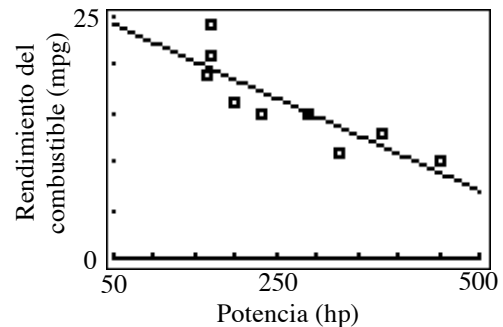
Parece razonable que la potencia de un automóvil esté relacionados con el rendimiento del combustible. Supón que seleccionamos una muestra aleatoria de 9 automóviles y registramos su potencia del motor y el rendimiento del combustible en ciudad.

Potencia (hp)	197	170	166	230	381	170	326	451	290
Rendimiento (mpg)	16	24	19	15	13	21	11	10	15

Calculamos la LRMC y creamos los diagramas de dispersión y valor residual de la derecha (estos diagramas fueron creados también en la Lección 6.2.1 de esta *Guía para padres con práctica adicional*).

El patrón curvo en el diagrama de valor residual indica que un modelo no lineal se ajustará mejor a los datos.

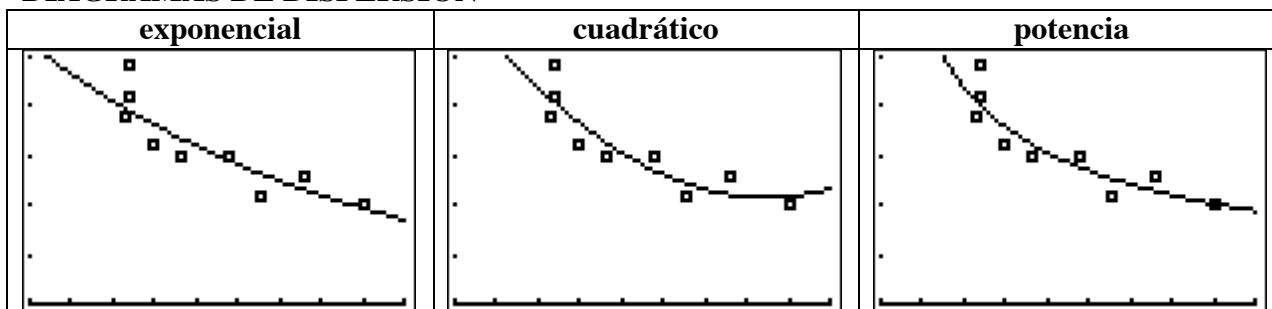
- Crea regresiones para los datos con modelos exponenciales, cuadráticos, y de potencia, y grafica los diagramas de dispersión y valor residual correspondientes. Todas estas regresiones están disponibles en la calculadora TI-83/84+, en la misma pantalla que la regresión lineal.
- Usa los diagramas de valor residual para seleccionar el mejor modelo no lineal.
- ¿Cuál predices que será el rendimiento de un automóvil con 400 caballos de fuerza?



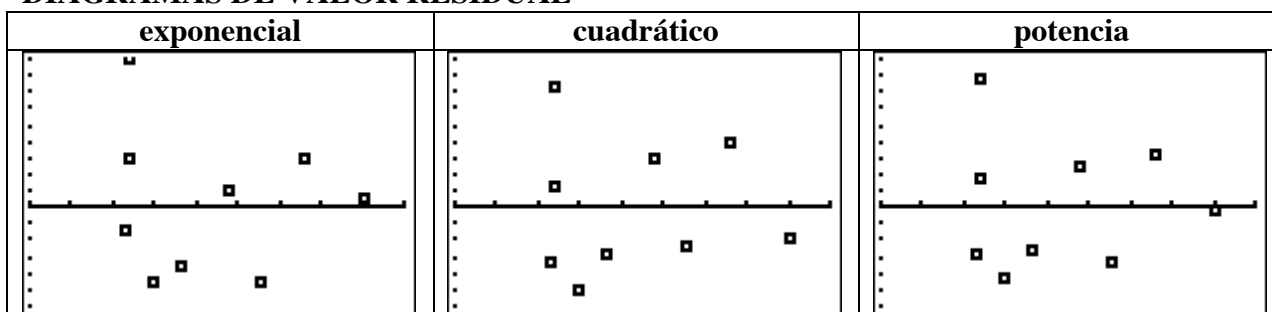
Respuesta

a.

DIAGRAMAS DE DISPERSIÓN



DIAGRAMAS DE VALOR RESIDUAL



- b. El modelo de exponencial aún parece tener forma de U. Tanto el modelo cuadrático como el de potencia parecen tener valores residuales dispersos en forma más aleatoria. Sin embargo, existen serios problemas con el modelo cuadrático: el modelo cuadrático vuelve a subir, lo que indica que el rendimiento de combustible aumenta en los automóviles con una cantidad ligeramente mayor de potencia. Eso no tiene sentido. Usaremos el modelo de potencia para representar estos datos.
- c. Para el modelo de potencia, $y = 732.94 \cdot x^{-0.7004}$, donde x es la potencia (en hp) e y es el rendimiento del combustible (en mpg). Si $x = 400$, entonces $y = 11.03$. Predecimos que un automóvil con 400 caballos de fuerza tendrá un rendimiento de aproximadamente 11 millas por galón.

En estas secciones, los alumnos generalizarán lo que han aprendido sobre las progresiones geométricas para investigar funciones exponenciales. Los alumnos estudiarán funciones exponenciales de forma $y = ab^x$ y observarán múltiples representaciones de funciones exponenciales, incluyendo gráficos, tablas, ecuaciones, y contextos. También aprenderán a pasar de una representación a otra. Los alumnos aprenderán que el valor de a es el “valor inicial” de la función— a es el punto de corte con el eje y o el valor de la función cuando $x = 0$. b es el crecimiento (multiplicador). Si $b > 1$ la función aumenta; si b es una fracción entre 0 y 1 (es decir, $0 < b < 1$), entonces la función disminuye (decae). En este curso no se toman en cuenta los valores de $b < 0$.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 7.1.3 y 7.2.3. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material de los Puntos de comprobación 9 y 10A al final del libro.

Ejemplo 1

LuAnn tiene \$500 para abrir una cuenta de ahorro. Puede abrir una cuenta en Fredrico’s Bank, que paga un interés del 7%, compuesto en forma mensual, o en Money First Bank, que paga un interés del 7.25%, compuesto en forma trimestral. LuAnn planea no tocar el dinero en la cuenta por diez años. ¿En qué banco debería depositar su dinero? Justifica tu respuesta.

Solución: la respuesta obvia es que debería depositar su dinero en el banco que pague más intereses en diez años, pero ¿cuál paga más? En ambos bancos, el capital inicial es \$500. Fredrico’s Bank paga un 7% compuesto en forma mensual, lo que significa que la tasa de interés es $\frac{0.07}{12} \approx 0.00583$ al mes. Si LuAnn deposita su dinero en Fredrico’s Bank, en un mes tendrá:

$$500 + 500(0.00583) = 500(1.00583) \approx \$502.92.$$

Para calcular la cantidad al final del segundo mes, debemos multiplicar nuevamente por 1.00583, lo que resulta en:

$$500(1.00583)^2 \approx \$505.85.$$

Después de tres meses, el saldo es:

$$500(1.00583)^3 \approx \$508.80.$$

Esto sucederá cada mes por diez años, que son 120 meses. Después de 120 meses, el saldo será:

$$500(1.00583)^{120} \approx \$1004.43.$$

Observa que esta última ecuación es una función exponencial en forma $y = ab^x$, donde y es la cantidad de dinero en la cuenta y x es la cantidad de meses (en este caso, 120 meses). $a = 500$ es el valor inicial (en 0 meses), y $b = 1.00583$ es el multiplicador o la tasa de crecimiento mensual de la cuenta.

El ejemplo continúa en la página siguiente→

Continuación del ejemplo de la página anterior.

En el caso de Money First Bank debemos realizar un cálculo similar. Este banco paga una tasa de interés mayor, 7.25%, pero solo la calcula y compone trimestralmente (es decir, cuatro veces al año o cada tres meses). Por lo tanto, cada trimestre el banco calcula un interés de $\frac{0.0725}{4} = 0.018125$. Al final del primer trimestre, LuAnn tendrá:

$$500(1.018125) \approx \$509.06.$$

Después de diez años (40 trimestres) LuAnn tendrá:

$$500(1.018125)^{40} \approx \$1025.69.$$

Observa que esta última ecuación es una función exponencial en forma $y = ab^x$, donde y es la cantidad de dinero en la cuenta y x es la cantidad de trimestres (en este caso, 40 trimestres). $a = 500$ es el valor inicial (en 0 trimestres), y $b = 1.018125$ es el multiplicador o tasa de crecimiento trimestral de la cuenta.

Ya que Money First Bank le pagaría aproximadamente \$21 más en concepto de intereses que Fredrico's Bank, debería depositar su dinero en Money First Bank.

Ejemplo 2

La mayoría de las casas aumentan de valor a tasas variables, dependiendo de su ubicación, tamaño y otros factores. Pero si una casa es alquilada, el Servicio de Impuestos Internos (IRS) permite al propietario asumir que su valor se depreciará. Supón que una casa que cuesta \$150,000 está alquilada y se deprecia a una tasa del 8% anual. ¿Cuál es el multiplicador que permite calcular cuál será el valor de la casa después de un año? ¿Cuál será el valor de la casa después de un año? ¿Cuál será su valor después de diez años? ¿Cuántos años pasarán hasta que la casa valga la mitad de su precio de compra? Dibuja un gráfico de esta situación.

Solución: a diferencia de los intereses, que aumentan un valor, la depreciación lo disminuye. Después de un año, el valor de la casa será $150000 - 0.08(150000)$, que es igual a $150000(0.92)$. Por lo tanto, el multiplicador es 0.92. Después de un año, el valor de la casa será $150000(0.92) = \$138,000$. Después de diez años, el valor será $150000(0.92)^{10} \approx \$65,158.27$.

Esta última ecuación es una función exponencial en forma $y = ab^x$, donde y es el valor de la casa y x es la cantidad de años. $a = 150000$ es el valor inicial (en 0 años), y $b = 0.92$ es el multiplicador o factor de crecimiento (en este caso, de decaimiento) anual.

Para hallar el momento en el que la casa valdrá la mitad de su precio de compra, debemos determinar en qué momento el valor de la casa será de \$75,000. Acabamos de calcular que, después de diez años, el valor de la casa será menor de \$75,000, así que esto se produce en menos de diez años. Para ayudarte a responder esta pregunta, crea una tabla con los valores de la casa para ver su depreciación.

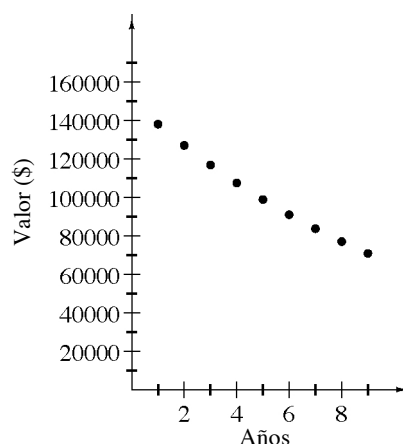
El ejemplo continúa en la página siguiente →

Continuación del ejemplo de la página anterior.

En la tabla o el gráfico podrás ver que la casa valdrá la mitad de su precio de compra después de 8 años.

Nota: puedes escribir la ecuación $75000 = 150000 \cdot 0.92^x$, pero no adquirirás el conocimiento matemático necesario para resolver esta ecuación y hallar el valor de x hasta más adelante. Sin embargo, puedes usar la ecuación para hallar un valor más exacto: intenta reemplazar x por distintos valores para que el valor de y se acerque más y más a \$75,000. Después de aproximadamente 8.313 años, el valor de la casa será cercano a \$75,000.

Años	Valor de la casa
1	138000
2	126960
3	116803.20
4	107458.94
5	98862.23
6	90953.25
7	83676.99
8	76982.83
9	70824.20



Ejemplo 3

Escribe una ecuación que represente la función descrita en la siguiente tabla;

Semana	Peso del cultivo de bacterias (g)
1	756.00
2	793.80
3	833.49

La función exponencial tendrá la forma $y = ab^x$, donde y es el peso de un cultivo de bacterias y x es la cantidad de semanas transcurridas. El multiplicador, b , del peso del cultivo de bacterias es 1.05 (porque $793.80 \div 756 = 1.05$ y $833.49 \div 793.80 = 1.05$, etc.). El punto inicial, a , no está dado, porque no sabemos cuánto pesaba el cultivo en la Semana 0. Sin embargo, ya que el peso aumenta a razón de 1.05 por semana, sabemos que $(1.05) \cdot (\text{peso en la Semana 0}) = 756.00$ g. El peso en la Semana 0 es 720 g, así que $a = 720$. Ahora podemos escribir la ecuación:

$$y = 720 \cdot 1.05^x,$$

donde y es el peso del cultivo de bacterias (g), y x es el tiempo transcurrido (semanas).

Problemas

1. En siete años, el hijo de Seta, Stu, dejará su casa para ir a la universidad. Seta espera poder ahorrar \$8000 para pagar su primer año de estudios. Actualmente tiene \$5000 y encontró un banco que paga un interés del 7.75%, compuesto diariamente. A esta tasa, ¿tendrá el dinero que necesita para el primer año de estudios de Stu? De no ser así, ¿cuánto más dinero necesitará?

2. Hace ocho años, Rudi pensó que realizaba una gran inversión al comprar \$1000 en acciones de Pro Sports Management. Lamentablemente, su inversión se depreció a una tasa constante del 15% anual. ¿Cuánto valen sus acciones ahora? Justifica tu respuesta.

3. Halla la ecuación de las funciones exponenciales representadas en las tablas a continuación en forma $y = ab^x$.

a.

x	$f(x)$
0	1600
1	2000
2	2500
3	3125

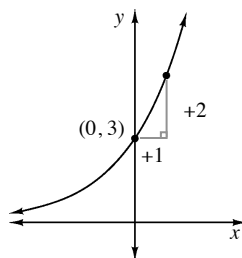
b.

x	y
1	40
2	32
3	25.6

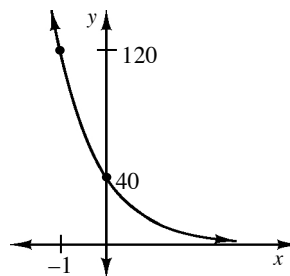
4. El nuevo balón Bamo Super Ball tiene una tasa de rebote de 0.97. Si dejaras caer el balón desde una altura de 125 pies, ¿qué altura alcanzará con el décimo rebote?

5. Halla la ecuación de las funciones exponenciales representadas por los gráficos a continuación en forma $y = ab^x$.

a.



b.



6. Fredrico's Bank te permitirá decidir la frecuencia con la que computará tus intereses, pero con algunas restricciones. Si tus intereses son computados anualmente, serán del 8%. Si son computados trimestralmente, serán del 7.875%. Si son computados mensualmente, serán del 7.75%. Si son computados semanalmente, serán del 7.625%. Si son computados diariamente, serán del 7.5%. ¿Cuál es el mejor trato? Justifica tu respuesta.

7. Investiga completamente el gráfico de la función $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 4$. Para más información sobre cómo describir completamente el gráfico de una función, consulta la sección Descripción de funciones (Lecciones 1.1.3 a 1.2.2) incluida en esta *Guía para padres con práctica adicional*.

Respuestas

1. Sí, para ese momento tendrá unos \$8601.02. La tasa diaria es $\frac{0.0775}{365} \approx 0.000212329$. Siete años son 2555 días, así que $\$5000(1.000212329)^{2555} \approx \8601.02 .
2. Ahora solo valen aproximadamente \$272.49.
3. a. $y = 1600(1.25)^x$ b. $y = 50(0.8)^x$
4. Unos 92.18 pies.
5. a. $y = 3\left(\frac{5}{3}\right)^x$ b. $y = 40\left(\frac{1}{3}\right)^x$
6. La mejor forma de resolver este problema es elegir cualquier monto y ver cómo aumenta en el curso de un año. Si tomamos \$100, después de un año, un interés del 8% compuesto en forma anual arrojará \$108. 7.875% compuesto en forma trimestral arrojará \$108.11. 7.75% compuesto en forma mensual arrojará \$108.03. 7.625% compuesto en forma semanal arrojará \$107.91. 7.5% compuesto en forma diaria arrojará \$107.79. La mejor opción es el pago de intereses compuestos en forma trimestral.
7. Esta es una función continua y no lineal (curvada). Tiene un punto de corte con el eje y en (0, 5) y no tiene ningún punto de corte con el eje x. El dominio son todos los valores reales de x, y el rango son todos los valores reales de y > 4. Esta función tiene una asíntota horizontal en y = 4, y no tiene ninguna asíntota vertical. Es una función exponencial.

EXPONENTES FRACCIONARIOS

7.2.1

Un exponente fraccionario es equivalente a una expresión con raíces o radicales.

$$\text{Para } x \neq 0, x^{a/b} = (x^a)^{1/b} = \sqrt[b]{x^a} \text{ o } x^{a/b} = (x^{1/b})^a = (\sqrt[b]{x})^a.$$

Los exponentes fraccionarios también pueden ser usados para resolver ecuaciones con exponentes. Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 7.2.2.

Ejemplo 1

Reescribe las siguientes expresiones en forma de radical y simplifícalas, de ser posible.

a. $16^{5/4}$

b. $(-8)^{2/3}$

Solución:

a. $16^{5/4}$
 $= (16^{1/4})^5$
 $= (\sqrt[4]{16})^5$
 $= (2)^5$
 $= 32$

O $16^{5/4}$
 $= (16^5)^{1/4}$
 $= (1,048,576)^{1/4}$
 $= \sqrt[4]{1,048,576}$
 $= 32$

b. $(-8)^{2/3}$
 $= ((-8)^{1/3})^2$
 $= (\sqrt[3]{-8})^2$
 $= (-2)^2$
 $= 4$

O $(-8)^{2/3}$
 $= ((-8)^2)^{1/3}$
 $= (64)^{1/3}$
 $= \sqrt[3]{64}$
 $= 4$

Ejemplo 2

Simplifica las expresiones dadas a continuación. Las respuestas no deben contener paréntesis ni exponentes negativos.

a. $(144x^{-12})^{1/2}$

b. $\left(\frac{8x^7y^3}{x}\right)^{-1/3}$

Si usamos la Propiedad de potencia de los exponentes, la Propiedad de los exponentes negativos, y la Propiedad de los exponentes fraccionarios:

a. $(144x^{-12})^{1/2} = \left(\frac{144}{x^{12}}\right)^{1/2}$
 $= \sqrt{\frac{144}{x^{12}}} = \frac{12}{x^6}$

b. $\left(\frac{8x^7y^3}{x}\right)^{-1/3} = \left(\frac{x}{8x^7y^3}\right)^{1/3}$
 $= \left(\frac{1}{8x^6y^3}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{8x^6y^3}} = \frac{1}{2x^2y}$

Ejemplo 3

Resuelve las ecuaciones a continuación y halla el valor de x .

a. $x^7 = 42$

b. $3x^{12} = 132$

Solución: al igual que en muchas otras ecuaciones, debemos aislar la variable (despejarla), y luego eliminar el exponente. Esto requerirá que usemos una de las Propiedades de la potencia: $(x^a)^b = x^{ab}$.

a. $x^7 = 42$

$$(x^7)^{1/7} = (42)^{1/7}$$

$$x^{7 \cdot (1/7)} = (42)^{1/7}$$

$$x^1 = (42)^{1/7}$$

$$x \approx 1.706$$

b. $3x^{12} = 132$

$$\frac{3x^{12}}{3} = \frac{132}{3}$$

$$x^{12} = 44$$

$$(x^{12})^{1/12} = (44)^{1/12}$$

$$x = (44)^{1/12}$$

$$x \approx \pm 1.371$$

El último cálculo requiere que calculemos la raíz cuadrada de 42 en el punto (a) y la raíz duodécima de 44 en el punto (b). Observa que solo hay una respuesta para el punto (a), donde el exponente es impar, pero hay dos respuestas ($\pm$) para el punto (b), donde el exponente es par. Las raíces pares siempre producen dos respuestas, una positiva y una negativa. Si el problema es una situación del mundo real, asegúrate de que tanto el resultado positivo como el negativo tengan sentido antes de incluir ambas soluciones en tu respuesta. Tal vez debas desestimar una de las soluciones para que tu respuesta sea factible.

Problemas

Convierte las expresiones a continuación a su forma de radical y luego simplifícalas.

1. $(64)^{2/3}$

2. $16^{-1/2}$

3. $(-27)^{1/3}$

Simplifica las siguientes expresiones tanto como sea posible:

4. $(16a^8b^{12})^{3/4}$

5. $\frac{144^{1/2}x^{-3}}{(16^{3/4}x^7)^0}$

6. $\frac{a^{2/3}b^{-3/4}c^{7/8}}{a^{-1/3}b^{1/4}c^{1/8}}$

Resuelve las siguientes ecuaciones y halla el valor de x :

7. $x^8 = 65,536$

8. $-5x^{-3} = \frac{25}{40}$

9. $3^{5x} = 9^{x-1}$

10. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$

11. $2(3x - 5)^4 = 512$

12. $2^{4x-1} = 4$

Halla el error en cada una de las soluciones a continuación. Luego halla la solución correcta.

13. $4(x + 7)^6 = 1392$

$(x + 7)^6 = 348$

$x + 7 = 58$

$x = 51$

14. $5^{4x+2} = 10^{3x-1}$

$5^{4x+2} = 2 \cdot 5^{3x-1}$

$4x + 2 = 2(3x - 1)$

$4x + 2 = 6x - 1$

$3 = 2x$

$x = 1.5$

Respuestas

1. $(\sqrt[3]{64})^2 = 16$

2. $\frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$

3. $\sqrt[3]{-27} = -3$

4. $8a^6b^9$

5. $\frac{12}{x^3}$

6. $\frac{ac^{3/4}}{b}$

7. $x = 4$

8. $x = -2$

9. $x = -\frac{2}{3}$

10. $x = 0$

11. $x = 3$

12. $x = \frac{3}{4}$

13. Ambos lados deben ser elevados a $\frac{1}{6}$ (o debe calcularse su raíz sexta), no divididos por seis. $x \approx -4.35$.

14. Ya que 5 y 10 no pueden ser escritos como la potencia de un mismo número, la única forma en la que puedes resolver la ecuación por ahora es adivinando y verificando valores. $x \approx 11.75$. Si no obtuviste esta respuesta, no te preocupes. La idea del problema es que halles el error. Hay un segundo error: el 2 no fue distribuido en la cuarta línea.

Los alumnos escribirán una ecuación de forma $y = ab^x$ que atraviesa dos puntos dados (las ecuaciones de esta forma tienen una asíntota en $y = 0$.)

Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 9.3.1. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material de los Puntos de comprobación 9 y 10A.

Ejemplo 1

Halla una ecuación para una función exponencial que atraviesa los puntos $(0, 8)$ y $(4, \frac{1}{2})$.

Solución: sustituye x e y por las coordenadas de cada par de puntos en la ecuación general. Luego resuelve el sistema resultante de dos ecuaciones para hallar a y b .

$$y = ab^x$$

$$\text{Ya que } (x, y) = (0, 8)$$

$$8 = ab^0$$

$$\text{Ya que } b^0 = 1,$$

$$8 = a(1), \text{ o}$$

$$a = 8.$$

$$y = ab^x$$

$$\text{Ya que } (x, y) = (4, \frac{1}{2}),$$

$$\frac{1}{2} = ab^4$$

Si sustituimos $a = 8$ en la primera ecuación por $\frac{1}{2} = ab^4$ de la segunda ecuación,

$$\frac{1}{2} = ab^4$$

$$\text{Pero, } a = 8,$$

$$\frac{1}{2} = 8b^4$$

$$\frac{1}{16} = b^4$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{b^4}$$

$$\frac{1}{2} = b$$

Ya que hallamos los valores de a y b , ahora podemos escribir la ecuación:

$$y = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Ejemplo 2

El Club Leopardo fue presentado en Internet en el año 2000. En 2004 tenía 14,867 “leopardos” (miembros). En 2007, la población de leopardos había aumentado hasta 22,610. Modela estos datos con una función exponencial y usa el modelo para predecir cuál será la población de leopardos en 2012.

Solución: podemos llamar al año 2000 nuestro año cero, o $x = 0$. Entonces, 2004 es $x = 4$, y el año 2007 será $x = 7$. Esto nos da dos puntos de datos, (4, 14867) y (7, 22610).

Para modelar con una función exponencial, usaremos la ecuación $y = ab^x$ y substituiremos las variables por los pares coordenados para obtener un sistema de dos ecuaciones.

$$\begin{array}{ll} y = ab^x & y = ab^x \\ 14867 = ab^4 & 22610 = ab^7 \end{array}$$

A fin de usar el Método de igualación de sistemas de ecuaciones para resolver el sistema de ecuaciones, debemos reescribir ambas ecuaciones en forma “ $a =$ ”:

$$\begin{array}{ll} 14867 = ab^4 & 22610 = ab^7 \\ a = \frac{14867}{b^4} & a = \frac{22610}{b^7} \end{array}$$

Entonces, si aplicamos el Método de igualación de sistemas de ecuaciones,

$$\begin{array}{l} \frac{14867}{b^4} = \frac{22610}{b^7} \\ 14867b^7 = 22610b^4 \\ \frac{b^7}{b^4} = \frac{22610}{14867} \\ b^3 = \frac{22610}{14867} \\ \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{\frac{22610}{14867}} \\ b \approx 1.15 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dadas las ecuaciones anteriores,} \\ a = \frac{14867}{b^4} \\ \text{Ya que } b \approx 1.15, \\ a = \frac{14867}{(1.15)^4} \\ a \approx 8500 \end{array}$$

Ya que $a \approx 8500$ y $b \approx 1.15$ podemos escribir la ecuación: $y = 8500 \cdot 1.15^x$, donde y representa la cantidad de miembros y x representa la cantidad de años desde 2000.

Usaremos la ecuación con $x = 12$ para predecir la población en 2012.

$$\begin{array}{l} y = 8500(1.15)^x \\ y = 8500(1.15)^{12} \\ y \approx 45477 \end{array}$$

Suponiendo que la tendencia continúa hasta el año 2012 como lo ha hecho en el pasado, predecimos que la población para 2012 será de 45,477.

Problemas

Halla las ecuaciones de funciones exponenciales con asíntotas en $y = 0$ que atraviesen cada uno de los siguientes pares de puntos:

1. $(0, 6)$ y $(3, 48)$
2. $(1, 21)$ y $(2, 147)$
3. $(-1, 72.73)$ y $(3, 106.48)$
4. $(-2, 351.5625)$ y $(3, 115.2)$
5. En un frío día de invierno, la temperatura exterior alcanzó los 0°C . Karen se preparó una taza de chocolate y la llevó afuera, donde debía cortar algo de madera. Sin embargo, decidió realizar un pequeño experimento científico en lugar de beber su chocolate. Colocó un termómetro en el chocolate y lo dejó a su lado mientras trabajaba, y anotó los tiempos y lecturas del termómetro incluidos en la siguiente tabla:

Tiempo desde la primera lectura	5	10	12	15
Temperatura ($^\circ\text{C}$)	24.41°	8.51°	5.58°	2.97°

Halla la ecuación de una función exponencial de forma $y = ab^x$ que modele estos datos.

Respuestas

1. $y = 6(2)^x$
2. $y = 3(7)^x$
3. $y = 80(1.1)^x$
4. $y = 225(0.8)^x$
5. Las respuestas variarán, pero deberían ser cercanas a $y = 70(0.81)^x$.

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES CUADRÁTICAS**8.1.1 – 8.1.4**

En el Capítulo 8, los alumnos aprenderán a reescribir expresiones cuadráticas y resolver ecuaciones cuadráticas. Las funciones cuadráticas son funciones que pueden ser escritas en forma $y = ax^2 + bx + c$ (donde $a \neq 0$) y, al graficarlas, crean una curva en forma de U que recibe el nombre de parábola.

Existen varios métodos que pueden usarse para resolver ecuaciones cuadráticas. Uno de ellos requiere factorizar primero la expresión cuadrática. En las Lecciones 8.1.1 a 8.1.4, los alumnos factorizarán expresiones cuadráticas.

En capítulos anteriores, los alumnos usaron azulejos algebraicos para crear “rectángulos genéricos” de expresiones cuadráticas. En la figura incluida a continuación, la base y la altura del rectángulo son $(x + 2)$ y $(x + 4)$. Ya que el área del rectángulo está dada por la fórmula (base)(altura) = área, el área del rectángulo a continuación puede ser expresada como un *producto*, $(x + 2)(x + 4)$. Pero las pequeñas piezas del rectángulo también integran su área, así que esta puede ser expresada como una *suma*, $4x + 8 + x^2 + 2x$, o $x^2 + 6x + 8$. Los alumnos escribieron: $(x + 2)(x + 4) = x^2 + 6x + 8$.

En la figura de la derecha, la base y la altura del rectángulo, que son $(x + 2)$ y $(x + 4)$, son *factores* de la expresión cuadrática $x^2 + 6x + 8$, ya que al multiplicar $(x + 2)$ y $(x + 4)$ obtenemos la expresión cuadrática $x^2 + 6x + 8$. Observa que $4x$ y $2x$ se hallan en una diagonal. Son términos similares y pueden ser combinados y escritos como $6x$.

		$+ 4$	
		$4x$	8
x	x	x^2	$2x$
	2	$x + 2$	

Los factores de $x^2 + 6x + 8$ son $(x + 2)$ y $(x + 4)$.

En un rectángulo genérico, los términos ax^2 y c siempre se hallan en una misma diagonal. En este ejemplo, el término ax^2 es $(1x^2)$ y el término c es la constante 8. El producto de esta diagonal es $1x^2 \cdot 8 = 8x^2$. Los dos términos x integran la otra diagonal y pueden ser combinados en una suma porque son términos semejantes. La b de una expresión cuadrática es la *suma* de los coeficientes de estos factores: $2x + 4x = 6x$, así que $b = 6$. El producto de esta otra diagonal es $(2x)(4x) = 8x^2$. *Observa que los productos de las dos diagonales siempre son equivalentes.* En el libro, los alumnos pueden llamar a esta regla “patrón de Casey”, por el personaje ficticio llamado Casey del problema 8-4.

Para factorizar una expresión cuadrática, los alumnos deben identificar los coeficientes de los dos términos x para que los productos de ambas diagonales sean equivalentes, y también que la suma de los dos términos x es igual a b . Los alumnos pueden usar un “problema de diamante” para organizar sus sumas y productos. Para más información sobre el uso de problemas de diamantes y rectángulos genéricos para factorizar expresiones cuadráticas, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 8.1.4.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 8.1.1 a 8.1.4. Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material del Punto de Comprobación 10B al final del libro.

Ejemplo 1

Factoriza $x^2 + 7x + 12$.

Diagrama un rectángulo genérico.

Coloca x^2 y 12 en una diagonal.

	12
x^2	

Halla dos términos cuyo producto sea $12x^2$ y cuya suma sea $7x$. En este caso, $3x$ y $4x$ (los alumnos estudiaron esta situación como un “problema de diamante” en el Capítulo 1).

$3x$	12
x^2	$4x$

Escribe estos términos en la otra diagonal. Puedes incluir cualquiera de los términos en cualquier espacio.

Determina la base y la altura del rectángulo exterior usando las áreas de las piezas pequeñas y hallando el máximo factor común de cada fila y columna.

+ 3	$3x$	12
x	x^2	$4x$
	$x + 4$	

Escribe la suma como producto (forma factorizada).

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

Ejemplo 2

Factoriza $x^2 + 7x - 30$.

Diagrama un rectángulo genérico.

Coloca x^2 y -30 en una diagonal.

	-30
x^2	

Halla dos términos cuyo producto sea $-30x^2$ y cuya suma sea $7x$. En este caso, $-3x$ y $10x$.

$-3x$	-30
x^2	$10x$

Escribe estos términos en la otra diagonal. Puedes incluir cualquiera de los términos en cualquier espacio.

Determina la base y la altura del rectángulo exterior usando las áreas de las piezas pequeñas y hallando el máximo factor común de cada fila y columna.

-3	$-3x$	-30
x	x^2	$10x$
	$x - 10$	

Escribe la suma como producto (forma factorizada).

$$x^2 + 7x - 30 = (x - 3)(x + 10)$$

Ejemplo 3

Factoriza $x^2 - 15x + 56$.

Diagrama un rectángulo genérico.

	56
x^2	

Coloca x^2 y 56 en una diagonal.

$-8x$	56
x^2	$-7x$

Halla dos términos cuyo producto sea $56x^2$ y cuya suma sea $-15x$. Escribe estos términos en la otra diagonal.

-8	$-8x$	56
x	x^2	$-7x$
	$x - 7$	

Determina la base y la altura del rectángulo exterior usando las áreas de las piezas pequeñas y hallando el máximo factor común de cada fila y columna.

Escribe la suma como producto (forma factorizada).

$$x^2 - 15x + 56 = (x - 7)(x - 8)$$

Ejemplo 4

Factoriza $12x^2 - 19x + 5$.

Diagrama un rectángulo genérico.

$-15x$	5
$12x^2$	$-4x$

 $\rightarrow$

-5	$-15x$	5
$4x$	$12x^2$	$-4x$
	$3x - 1$	

Coloca $12x^2$ y 5 en una diagonal.

Halla dos términos cuyo producto sea $60x^2$ y cuya suma sea $-19x$. Escribe estos términos en la otra diagonal.

Halla la base y la altura del rectángulo. Verifica los signos de los factores.

Escribe la suma como producto (forma factorizada).

$$(3x - 1)(4x - 5) = 12x^2 - 19x + 5$$

Ejemplo 5

Factoriza $3x^2 + 21x + 36$.

Nota: si todos los términos presentan un factor común, este debe ser eliminado primero.

Por ejemplo, $3x^2 + 21x + 36 = 3(x^2 + 7x + 12)$.

Entonces $x^2 + 7x + 12$ puede ser factorizado en la forma usual, como en el Ejemplo.

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4).$$

Luego, ya que la expresión $3x^2 + 21x + 36$ tiene un factor de 3,

$$3x^2 + 21x + 36 = 3(x^2 + 7x + 12) = 3(x + 3)(x + 4).$$

Problemas

- | | | | |
|-------------------------|------------------------|----------------------|----------------------|
| 1. $x^2 + 5x + 6$ | 2. $2x^2 + 5x + 3$ | 3. $3x^2 + 4x + 1$ | 4. $3x^2 + 30x + 75$ |
| 5. $x^2 + 15x + 44$ | 6. $x^2 + 7x + 6$ | 7. $2x^2 + 22x + 48$ | 8. $x^2 + 4x - 32$ |
| 9. $4x^2 + 12x + 9$ | 10. $24x^2 + 22x - 10$ | 11. $x^2 + x - 72$ | 12. $3x^2 - 20x - 7$ |
| 13. $x^3 - 11x^2 + 28x$ | 14. $2x^2 + 11x - 6$ | 15. $2x^2 + 5x - 3$ | 16. $x^2 - 3x - 10$ |
| 17. $4x^2 - 12x + 9$ | 18. $3x^2 + 2x - 5$ | 19. $6x^2 - x - 2$ | 20. $9x^2 - 18x + 8$ |

Respuestas

- | | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|
| 1. $(x + 2)(x + 3)$ | 2. $(x + 1)(2x + 3)$ | 3. $(3x + 1)(x + 1)$ | 4. $3(x + 5)(x + 5)$ |
| 5. $(x + 11)(x + 4)$ | 6. $(x + 6)(x + 1)$ | 7. $2(x + 8)(x + 3)$ | 8. $(x + 8)(x - 4)$ |
| 9. $(2x + 3)(2x + 3)$ | 10. $2(3x - 1)(4x + 5)$ | 11. $(x - 8)(x + 9)$ | 12. $(x - 7)(3x + 1)$ |
| 13. $x(x - 4)(x - 7)$ | 14. $(x + 6)(2x - 1)$ | 15. $(x + 3)(2x - 1)$ | 16. $(x - 5)(x + 2)$ |
| 17. $(2x - 3)(2x - 3)$ | 18. $(3x + 5)(x - 1)$ | 19. $(2x + 1)(3x - 2)$ | 20. $(3x - 4)(3x - 2)$ |

ATAJOS DE FACTORIZACIÓN**8.1.5**

Si bien la mayoría de los problemas de factorización pueden resolverse con rectángulos genéricos, existen dos patrones de factorización especiales que pueden resolverse mentalmente, si se los reconoce. Estos patrones reciben los nombres de **Diferencia de cuadrados** y **Trinomio cuadrado perfecto**. Los patrones generales son los siguientes:

Diferencia de cuadrados: $a^2x^2 - b^2y^2 = (ax + by)(ax - by)$

Trinomio cuadrado perfecto: $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (ax + by)^2$

Ejemplo 1**Diferencias de cuadrados**

$$x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$$

$$4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$$

$$9x^2 - 1 = (3x - 1)(3x + 1)$$

Trinomios cuadrados perfectos

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$$

Ejemplo 2

A veces, eliminar un factor común revela uno de estos patrones especiales:

$$8x^2 - 50y^2 \Rightarrow 2(4x^2 - 25y^2) \Rightarrow 2(2x + 5y)(2x - 5y)$$

$$12x^2 + 12x + 3 \Rightarrow 3(4x^2 + 4x + 1) \Rightarrow 3(2x + 1)^2$$

Problemas

Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados:

- | | | |
|------------------|-------------------|------------------|
| 1. $x^2 - 16$ | 2. $x^2 - 25$ | 3. $64m^2 - 25$ |
| 4. $4p^2 - 9q^2$ | 5. $9x^2y^2 - 49$ | 6. $x^4 - 25$ |
| 7. $64 - y^2$ | 8. $144 - 25p^2$ | 9. $9x^4 - 4y^2$ |

Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

- | | | |
|---------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 10. $x^2 + 4x + 4$ | 11. $y^2 + 8y + 16$ | 12. $m^2 - 10m + 25$ |
| 13. $x^2 - 4x + 16$ | 14. $a^2 + 8ab + 16b^2$ | 15. $36x^2 + 12x + 1$ |
| 16. $25x^2 - 30xy + 9y^2$ | 17. $9x^2y^2 - 6xy + 1$ | 18. $49x^2 + 1 + 14x$ |

Factoriza completamente:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-----------------|
| 19. $9x^2 - 16$ | 20. $9x^2 + 24x + 16$ | 21. $9x^2 - 36$ |
| 22. $2x^2 + 8xy + 8y^2$ | 23. $x^2y + 10xy + 25y$ | 24. $8x^2 - 72$ |
| 25. $4x^3 - 9x$ | 26. $4x^2 - 8x + 4$ | 27. $2x^2 + 8$ |

Respuestas

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 1. $(x + 4)(x - 4)$ | 2. $(x + 5)(x - 5)$ | 3. $(8m + 5)(8m - 5)$ |
| 4. $(2p + 3q)(2p - 3q)$ | 5. $(3xy + 7)(3xy - 7)$ | 6. $(x^2 + 5)(x^2 - 5)$ |
| 7. $(8 + y)(8 - y)$ | 8. $(12 + 5p)(12 - 5p)$ | 9. $(3x^2 + 2y)(3x^2 - 2y)$ |
| 10. $(x + 2)^2$ | 11. $(y + 4)^2$ | 12. $(m - 5)^2$ |
| 13. no factorizable (primo) | 14. $(a + 4b)^2$ | 15. $(6x + 1)^2$ |
| 16. $(5x - 3y)^2$ | 17. $(3xy - 1)^2$ | 18. $(7x + 1)^2$ |
| 19. $(3x + 4)(3x - 4)$ | 20. $(3x + 4)^2$ | 21. $9(x + 2)(x - 2)$ |
| 22. $2(x + 2y)^2$ | 23. $y(x + 5)^2$ | 24. $8(x + 3)(x - 3)$ |
| 25. $x(2x + 3)(2x - 3)$ | 26. $4(x - 1)^2$ | 27. $2(x^2 + 4)$ |

USO DE LA PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO**8.2.2 y 8.2.3**

El gráfico de una función cuadrática, una parábola, es una curva simétrica. Su punto más alto o más bajo recibe el nombre de vértice. El gráfico se crea usando la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Los alumnos han estado graficando parábolas sustituyendo x por distintos valores para hallar y . Este puede ser un proceso tedioso, especialmente si se desconoce el rango adecuado de valores de x . Si solo se necesita un diagrama rápido de la parábola, un método posible consiste en hallar primero los puntos de corte con el eje x , y luego el vértice y/o el punto de corte con el eje y . Para hallar los puntos de corte con el eje x , sustituye y por 0 y resuelve la ecuación cuadrática, $0 = ax^2 + bx + c$. Los alumnos aprenderán varios métodos para resolver ecuaciones cuadráticas en este capítulo y en el Capítulo 9. Un método de resolución utiliza la Propiedad de producto cero, es decir, el proceso de resolución por factorización. Este método se basa en dos ideas:

- (1) Cuando el producto de dos o más números es cero, entonces uno de los números también debe ser cero.
- (2) Algunas expresiones cuadráticas pueden ser factorizadas hasta obtener el producto de dos binomios.

Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 8.2.2.

Ejemplo 1

Halla los puntos de corte con el eje x de $y = x^2 + 6x + 8$.

Los puntos de corte con el eje x se encuentra en el gráfico donde $y = 0$, así que iguala la expresión cuadrática a cero y calcula x .

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

Factoriza la expresión cuadrática.

$$(x + 4)(x + 2) = 0$$

Iguala cada factor a 0.

$$(x + 4) = 0 \text{ o } (x + 2) = 0$$

Resuelve cada ecuación para hallar x .

$$x = -4 \text{ o } x = -2$$

Los puntos de corte con el eje x son $(-4, 0)$ y $(-2, 0)$.

Puedes verificar tus respuestas sustituyendo las variables de la ecuación original por los valores obtenidos.

$$(-4)^2 + 6(-4) + 8 \Rightarrow 16 - 24 + 8 \Rightarrow 0$$

$$(-2)^2 + 6(-2) + 8 \Rightarrow 4 - 12 + 8 \Rightarrow 0$$

Ejemplo 2

Resuelve $2x^2 + 7x - 15 = 0$.

Factoriza la expresión cuadrática. $(2x - 3)(x + 5) = 0$

Iguala cada factor a 0. $(2x - 3) = 0$ o $(x + 5) = 0$

Halla x en ambos casos. $2x = 3$ o $x = -5$

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x = -5$$

Ejemplo 3

Si la expresión cuadrática no es igual a 0, reescríbela algebraicamente para que lo sea y luego usa la Propiedad de producto cero.

Resuelve $2 = 6x^2 - x$.

Iguala la ecuación a 0.

$$2 = 6x^2 - x$$

$$0 = 6x^2 - x - 2$$

Factoriza la expresión cuadrática.

$$0 = (2x + 1)(3x - 2)$$

Halla x en ambos casos.

$$(2x + 1) = 0 \quad \text{o} \quad (3x - 2) = 0$$

$$2x = -1 \quad \text{o} \quad 3x = 2$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \quad \quad x = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 4

Resuelve $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Factoriza la expresión cuadrática.

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$(3x - 1)(3x - 1) = 0$$

Halla x en ambos casos. Observa que los factores son iguales, así que solo habrá una solución.

$$(3x - 1) = 0$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Problemas

Halla x .

1. $x^2 - x - 12 = 0$

2. $3x^2 - 7x - 6 = 0$

3. $x^2 + x - 20 = 0$

4. $3x^2 + 11x + 10 = 0$

5. $x^2 + 5x = -4$

6. $6x - 9 = x^2$

7. $6x^2 + 5x - 4 = 0$

8. $x^2 - 6x + 8 = 0$

9. $6x^2 - x - 15 = 0$

10. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

11. $x^2 - 12x = 28$

12. $2x^2 + 8x + 6 = 0$

13. $2 + 9x = 5x^2$

14. $2x^2 - 5x = 3$

15. $x^2 = 45 - 4x$

Respuestas

1. $x = 4$ o -3

2. $x = -\frac{2}{3}$ o 3

3. $x = -5$ o 4

4. $x = -\frac{5}{3}$ o -2

5. $x = -4$ o -1

6. $x = 3$

7. $x = -\frac{4}{3}$ o $\frac{1}{2}$

8. $x = 4$ o 2

9. $x = -\frac{3}{2}$ o $\frac{5}{3}$

10. $x = -\frac{3}{2}$

11. $x = 14$ o -2

12. $x = -1$ o -3

13. $x = -\frac{1}{5}$ o 2

14. $x = -\frac{1}{2}$ o 3

15. $x = 5$ o -9

En la Lección 8.2.3, los alumnos descubrieron que, si la ecuación de una parábola está escrita en **forma de graficación**: $f(x) = (x - h)^2 + k$, el vértice puede ser visto fácilmente como (h, k) . Por ejemplo, el vértice de la parábola $f(x) = (x + 3)^2 - 1$ es $(-3, -1)$. Luego, los alumnos pueden igualar la función a cero para hallar los puntos de corte con el eje x : resolver $0 = (x + 3)^2 - 1$ para hallar los puntos de corte con el eje x . Si necesitas ayuda para resolver este tipo de ecuaciones, consulta la Página de Recursos de la Lección 8.2.3, disponible en cpm.org. Los alumnos pueden igualar $x = 0$ para hallar los puntos de corte con el eje y : $y = (0 + 3)^2 - 1$.

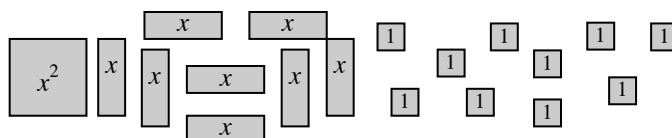
Cuando la ecuación de la parábola está dada en forma estándar: $f(x) = x^2 + bx + c$, podemos usar el método de **completar cuadrados** para convertirla de la forma estándar a la forma de graficación. Usamos azulejos algebraicos para visualizar el proceso.

Para más ejemplos y ejercicios de práctica con funciones cuadráticas en forma de graficación, consulta el material del Punto de comprobación 11 al final del libro.

Ejemplo 1 (usando azulejos algebraicos)

Completa el cuadrado para convertir $f(x) = x^2 + 8x + 10$ a su forma de graficación. Identifica el vértice y el punto de corte con el eje y , y dibuja un gráfico.

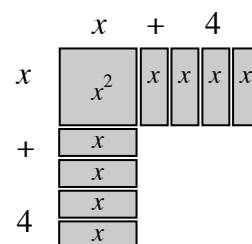
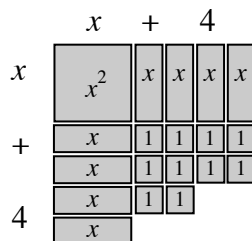
$f(x) = x^2 + 8x + 10$ se vería así:



Crea un cuadrado con los azulejos de la imagen de la derecha.

Se necesitan 16 azulejos de unidad para llenar la esquina, pero solo tenemos 10.

Incluye los 10 azulejos de unidad y dibuja el contorno del cuadrado completo.



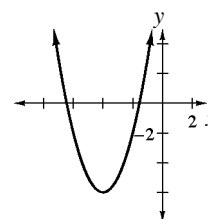
El **cuadrado completo** tendrá una base y una altura de $(x + 4)$, así que puede ser representado con la expresión cuadrática $(x + 4)^2$. Pero los azulejos de $x^2 + 8x + 10$ no forman un cuadrado completo: la expresión $x^2 + 8x + 10$ tiene seis azulejos menos que el cuadrado completo.

Entonces, $x^2 + 8x + 10$ es un cuadrado completo menos 6, o $(x + 4)^2$ menos 6.

Es decir:

$$x^2 + 8x + 10 = (x + 4)^2 - 6.$$

Dada la forma de graficación, el vértice es $(h, k) = (-4, -6)$. El punto de corte con el eje y es el punto en el que $x = 0$, así que $y = (0 + 4)^2 - 6 = 10$. El punto de corte con el eje x es $(0, 10)$, y puedes ver el gráfico a la derecha.



Ejemplo 2 (usando el proceso general)

Completa el cuadrado para convertir $f(x) = x^2 + 5x + 2$ a su forma de graficación. Identifica el vértice y el punto de corte con el eje y, y dibuja un gráfico.

Reescribe la expresión como: $f(x) = x^2 + 5x + 2$
 $f(x) = (x^2 + 5x + ?) + 2$

Convierte $(x^2 + 5x + ?)$ en un cuadrado perfecto tomando la mitad del coeficiente del término x y elevándola al cuadrado: $(\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$. Así obtienes $(x^2 + 5x + \frac{25}{4})$ que es un trinomio cuadrado perfecto.

Tenemos que escribir una función equivalente con $+\frac{25}{4}$, pero si sumamos $\frac{25}{4}$, también tenemos que restarlo:

$f(x) = x^2 + 5x + 2$ que puede ser reescrito como: $f(x) = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{17}{4}$.

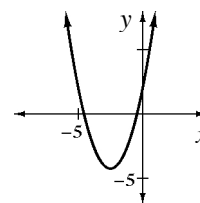
$$f(x) = (x^2 + 5x + \frac{25}{4}) + 2 - \frac{25}{4}$$

Ahora la función se halla en forma de graficación.

El vértice es $(-\frac{5}{2}, -\frac{17}{4})$ o $(-2.5, -4.25)$.

El punto de corte con el eje y se encuentra en el punto en que $x = 0$.

Así, $y = (0 + 2.5)^2 - 4.25 = 2$ y el punto de corte con el eje y es $(0, 2)$.



Si el proceso anterior no es claro, también puedes dibujar un rectángulo genérico de $x^2 + 5x + 2$ e imaginar que estás usando azulejos algebraicos.

$2.5x$	
x^2	$2.5x$

Debería haber $(-2.5)^2 = 6.25$ azulejos en la esquina superior derecha para completar el cuadrado. Pero la expresión $x^2 + 5x + 2$ solo incluye 2 azulejos de unidad. Esto quiere decir que nos faltan 4.25 azulejos de unidad. Entonces, nos falta 4.25 en el siguiente rectángulo:

$+ 2.5$	$2.5x$	
x	x^2	$2.5x$
	x	$+ 2.5$

Entonces, $(x + 2.5)^2$ menos 4.25 azulejos de unidad es equivalente a $x^2 + 5x + 2$, o,
 $x^2 + 5x + 2 = (x + 2.5)^2 - 4.25$.

Problemas

Completa el cuadrado para escribir cada una de las ecuaciones a continuación en forma de graficación. Luego menciona sus vértices.

- | | |
|--------------------------|---------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 + 6x + 7$ | 2. $f(x) = x^2 + 4x + 11$ |
| 3. $f(x) = x^2 + 10x$ | 4. $f(x) = x^2 + 7x + 2$ |
| 5. $f(x) = x^2 - 6x + 9$ | 6. $f(x) = x^2 + 3$ |
| 7. $f(x) = x^2 - 4x$ | 8. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ |
| 9. $f(x) = x^2 + 5x + 1$ | 10. $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x$ |

Respuestas

- | | |
|---|---|
| 1. $f(x) = (x + 3)^2 - 2; (-3, -2)$ | 2. $f(x) = (x + 2)^2 + 7; (-2, 7)$ |
| 3. $f(x) = (x + 5)^2 - 25; (-5, -25)$ | 4. $f(x) = (x + 3.5)^2 - 10.25; (-3.5, -10.25)$ |
| 5. $f(x) = (x - 3)^2; (3, 0)$ | 6. $f(x) = x^2 + 3; (0, 3)$ |
| 7. $f(x) = (x - 2)^2 - 4; (2, -4)$ | 8. $f(x) = (x + 1)^2 - 4; (-1, -4)$ |
| 9. $f(x) = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{21}{4}; (-\frac{5}{2}, -\frac{21}{4})$ | 10. $f(x) = (x - \frac{1}{6})^2 - \frac{1}{36}; (\frac{1}{6}, -\frac{1}{36})$ |

USO DE LA FÓRMULA CUADRÁTICA

9.1.2 y 9.1.3

Cuando una ecuación cuadrática no es factorizable, necesitas otro método para hallar x . La Fórmula cuadrática puede usarse para calcular las raíces de una función cuadrática, es decir, los puntos de corte con el eje x de la parábola. La Fórmula cuadrática puede ser usada con cualquier ecuación cuadrática, factorizable o no. Puede haber dos soluciones, una o ninguna, dependiendo de si la parábola intersecta el eje x una vez, dos o ninguna. Las soluciones a cualquier ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El símbolo $\pm$ se lee “más o menos”. Es una notación que te indica que debes calcular la fórmula dos veces, una con $+$ y una con $-$ para obtener ambos valores de x .

Para usar la fórmula, la ecuación cuadrática debe estar escrita en *forma estándar*: $ax^2 + bx + c = 0$. Esto es necesario para identificar correctamente los valores de a , b , y c . Una vez que la ecuación se halla en forma estándar y es igual a 0, a es el coeficiente del término x^2 , b es el coeficiente del término x y c es el término constante.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 9.1.1 a 9.1.4 y 10.2.4.

Ejemplo 1

Resuelve $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

Identifica a , b , y c . Presta atención a tus signos. $a = 2$, $b = -5$, $c = -3$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - (-24)}}{4}$$

Simplifica la $\sqrt{\quad}$.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

Calcula ambos valores de x .

$$x = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ o } x = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Las soluciones son $x = 3$ o $x = -\frac{1}{2}$.

Ejemplo 2

Resuelve $3x^2 + 5x + 1 = 0$.

Identifica a , b , y c .

$$a = 3, b = 5, c = 1$$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6}$$

Simplifica la $\sqrt{\quad}$.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Las soluciones son $x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \approx -0.23$ o $x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6} \approx -1.43$.

Ejemplo 3

Resuelve $25x^2 - 20x + 4 = 0$.

Identifica a , b , y c .

$$a = 25, b = -20, c = 4$$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(25)(4)}}{2(25)}$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{50}$$

Simplifica la $\sqrt{\quad}$.

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{50}$$

Esta ecuación cuadrática tiene una sola solución: $x = \frac{2}{5}$.

Ejemplo 4

Resuelve $x^2 + 4x + 10 = 0$.

Identifica a , b , y c .

$$a = 1, b = 4, c = 10$$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 40}}{2}$$

Simplifica la $\sqrt{\quad}$.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{2}$$

Calcular la raíz cuadrada de un número negativo es imposible; por lo tanto, esta ecuación cuadrática no tiene ninguna solución real.

Ejemplo 5

Resuelve $(3x + 1)(x + 2) = 1$.

Reescribe la ecuación en forma estándar.

$$(3x + 1)(x + 2) = 1$$

Es decir, reescribe el producto como suma y luego iguala la ecuación a cero.

$$3x^2 + 7x + 2 = 1$$

$$3x^2 + 7x + 1 = 0$$

Identifica a , b , y c .

$$a = 3, b = 7, c = 1$$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 12}}{6}$$

Simplifica.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Las soluciones son $x = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$, o, $x \approx -0.15$ o $x \approx -2.18$.

Ejemplo 6

Resuelve $3x^2 + 6x + 1 = 0$.

Identifica a , b , y c .

$$a = 3, b = 6, c = 1$$

Escribe la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye a , b , y c en la fórmula y realiza los cálculos iniciales.

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 12}}{6}$$

Simplifica.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{6}$$

Las soluciones son $x = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{6}$, o, $x \approx -1.82$ o $x \approx -0.18$.

El recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 9.1.4 describe otra forma de la expresión $\frac{-6 \pm \sqrt{24}}{6}$ que puede escribirse simplificando la raíz cuadrada. El resultado es equivalente a los valores establecidos anteriormente.

Factoriza la $\sqrt{24}$ y simplifica hallando la raíz cuadrada de 4.

$$\sqrt{24} = \sqrt{4} \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Simplifica la fracción dividiendo cada término por 2.

$$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{6}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3}$$

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones usando la Fórmula cuadrática.

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. $x^2 - x - 2 = 0$ | 2. $x^2 - x - 3 = 0$ | 3. $-3x^2 + 2x + 1 = 0$ |
| 4. $-2 - 2x^2 = 4x$ | 5. $7x = 10 - 2x^2$ | 6. $-6x^2 - x + 6 = 0$ |
| 7. $6 - 4x + 3x^2 = 8$ | 8. $4x^2 + x - 1 = 0$ | 9. $x^2 - 5x + 3 = 0$ |
| 10. $0 = 10x^2 - 2x + 3$ | 11. $x(-3x + 5) = 7x - 10$ | 12. $(5x + 5)(x - 5) = 7x$ |

Respuestas

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $x = 2$ o -1 | 2. $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$
≈ 2.30 o -1.30 | 3. $x = -\frac{1}{3}$ o 1 |
| 4. $x = -1$ | 5. $x = \frac{-7 \pm \sqrt{129}}{4}$
≈ 1.09 o -4.59 | 6. $x = \frac{1 \pm \sqrt{145}}{-12}$
≈ -1.09 o 0.92 |
| 7. $x = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$
≈ 1.72 o -0.39 | 8. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$
≈ 0.39 o -0.64 | 9. $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$
≈ 4.30 o 0.70 |
| 10. no tiene solución | 11. $x = \frac{2 \pm \sqrt{124}}{-6} = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{-3}$
≈ -2.19 o 1.52 | 12. $x = \frac{27 \pm \sqrt{1229}}{10}$
≈ 6.21 o -0.81 |

RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES CON UNA VARIABLE 9.2.1 y 9.2.2

Para **resolver una desigualdad con una variable**, debes convertirla primero en una ecuación. Coloca la solución, llamada “punto frontera” en una recta numérica. Este punto separa la recta numérica en dos regiones. El punto frontera se incluye en la solución de situaciones que incluyan $\geq$ o $\leq$, y se excluye en situaciones que incluyan estrictamente $>$ o $<$. En la recta numérica, los puntos frontera incluidos en la solución son sólidos, y los que están excluidos son círculos abiertos. Luego, elige un número de cada región separada por el punto frontera y verifica si hace la desigualdad original verdadera o falsa. Si la hace verdadera, todos los números de esa región son una solución a la desigualdad. De lo contrario, ningún número de esa región es una solución.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 9.2.1 y 9.3.2.

Ejemplo 1

Resuelve: $3x - (x + 2) \geq 0$

Conviértela en una ecuación y resuélvela.

Coloca la solución (punto de frontera) en la recta numérica. Ya que $x = 1$ es una solución a la desigualdad ($\geq$), usamos un punto sólido.

Prueba un número a cada lado del punto frontera en la desigualdad original.

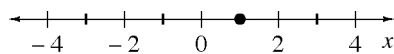
La solución es $x \geq 1$.

$$3x - (x + 2) = 0$$

$$3x - x - 2 = 0$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$



Prueba $x = 0$

$$3 \cdot 0 - (0 + 2) \geq 0$$

$$-2 \geq 0$$

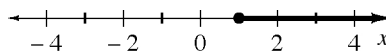
Falso

Prueba $x = 3$

$$3 \cdot 3 - (3 + 2) \geq 0$$

$$4 \geq 0$$

Verdadero



Ejemplo 2

Resuelve: $-x + 6 > x + 2$

Conviértela en una ecuación y resuélvela.

Coloca la solución (punto de frontera) en la recta numérica. Ya que el problema original es una desigualdad estricta ($>$), $x = 2$ no es una solución, y usamos un círculo abierto.

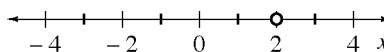
Prueba un número a cada lado del punto frontera en la desigualdad original.

La solución es $x < 2$.

$$-x + 6 = x + 2$$

$$-2x = -4$$

$$x = 2$$



Prueba $x = 0$

$$-0 + 6 > 0 + 2$$

$$6 > 2$$

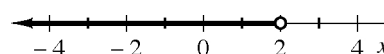
Verdadero

Prueba $x = 4$

$$-4 + 6 > 4 + 2$$

$$2 > 6$$

Falso



Problemas

Resuelve las siguientes desigualdades:

- | | | |
|----------------------------|------------------------------------|---|
| 1. $4x - 1 \geq 7$ | 2. $2(x - 5) \leq 8$ | 3. $3 - 2x < x + 6$ |
| 4. $\frac{1}{2}x > 5$ | 5. $3(x + 4) > 12$ | 6. $2x - 7 \leq 5 - 4x$ |
| 7. $3x + 2 < 11$ | 8. $4(x - 6) \geq 20$ | 9. $\frac{1}{4}x < 2$ |
| 10. $12 - 3x > 2x + 1$ | 11. $\frac{x-5}{7} \leq -3$ | 12. $3(5 - x) \geq 7x - 1$ |
| 13. $3y - (2y + 2) \leq 7$ | 14. $\frac{m+2}{5} < \frac{2m}{3}$ | 15. $\frac{m-2}{3} \geq \frac{2m+1}{7}$ |

Respuestas

- | | | |
|------------------------|-----------------------|------------------|
| 1. $x \geq 2$ | 2. $x \leq 9$ | 3. $x > -1$ |
| 4. $x > 10$ | 5. $x > 0$ | 6. $x \leq 2$ |
| 7. $x < 3$ | 8. $x \geq 11$ | 9. $x < 8$ |
| 10. $x < \frac{11}{5}$ | 11. $x \leq -16$ | 12. $x \leq 1.6$ |
| 13. $y \leq 9$ | 14. $m > \frac{6}{7}$ | 15. $m \geq 17$ |

Para graficar la solución de una desigualdad con dos variables, primero grafica la ecuación correspondiente. Este gráfico es la recta (o curva) de frontera, ya que todos los puntos que hacen que la desigualdad sea verdadera se encuentran a un lado u otro de la recta. Antes de graficar la ecuación, decide si la recta o la curva es parte de la solución o no, es decir, si debe ser continua o punteada. Si el símbolo de desigualdad es $\leq$ o $\geq$, la recta de frontera es parte de la desigualdad y debe ser continua. Si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$, la recta de frontera es punteada.

Luego, decide qué lado de la recta de frontera se debe sombrear para mostrar la parte del gráfico que representa todos los valores que hacen verdadera la desigualdad. Elige un punto que no se halle en la recta de frontera. Coloca este punto en la desigualdad *original*. Si la desigualdad es verdadera para el punto probado, sombrea el gráfico de ese lado de la recta de frontera. Si la desigualdad es falsa para el punto probado, sombrea el lado opuesto.

La porción sombreada representa todas las soluciones a la desigualdad original.

Cuidado: si debes modificar la desigualdad para graficarla, por ejemplo, convirtiéndola a su forma pendiente-ordenada al origen, usa siempre la desigualdad *original* para probar un punto, no la forma modificada.

Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 9.4.1.

Ejemplo 1

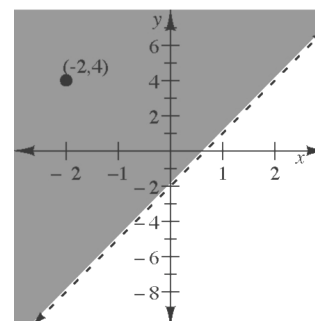
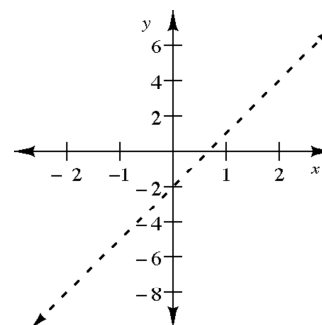
Grafica las soluciones de la desigualdad $y > 3x - 2$.

Primero, grafica la recta $y = 3x - 2$, pero dibújala punteada, ya que el uso del signo $>$ significa que la recta de frontera no es parte de la solución. Por ejemplo, el punto $(0, -2)$ es parte de la recta de frontera, pero no es una solución a la desigualdad porque $-2 \not> 3(0) - 2$ o $-2 \not> -2$.

Luego, prueba un punto que no sea parte de la recta de frontera. Para este ejemplo, usa el punto $(-2, 4)$.

$4 > 3(-2) - 2$, así que $4 > -8$, que es un enunciado verdadero.

Ya que la desigualdad es verdadera para este punto de prueba, sombrea la región que contiene el punto $(-2, 4)$. Todos los pares coordinados que son una solución se encuentran en la región sombreada.



Ejemplo 2

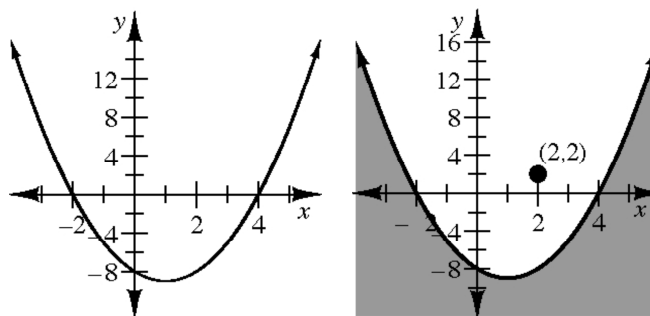
Grafica las soluciones de la desigualdad $y \leq x^2 - 2x - 8$.

Primero, grafica la parábola $y = x^2 - 2x - 8$ en forma continua, ya que $\leq$ significa que la curva de frontera es parte de la solución.

Luego, prueba el punto $(2, 2)$ por encima de la curva de frontera.

$$2 \leq 2^2 - 2 \cdot 2 - 8, \text{ así que } 2 \leq -8$$

Ya que la desigualdad es falsa para este punto de prueba por encima de la recta, sombrea la región debajo de la curva. Las soluciones se encuentran en la región sombreada.



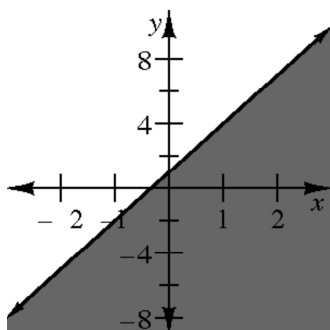
Problemas

Grafica las soluciones a las siguientes desigualdades en distintos grupos de ejes.

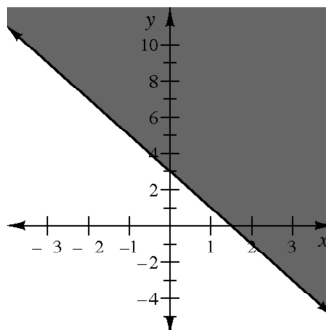
- | | | |
|---------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1. $y \leq 3x + 1$ | 2. $y \geq -2x + 3$ | 3. $y > 4x - 2$ |
| 4. $y < -3x - 5$ | 5. $y \leq 3$ | 6. $x > 1$ |
| 7. $y > \frac{2}{3}x + 8$ | 8. $y < -\frac{3}{5}x - 7$ | 9. $3x + 2y \geq 7$ |
| 10. $-4x + 2y < 3$ | 11. $y \geq x^2 - 3$ | 12. $y \leq x^2 + 2x$ |
| 13. $y < 4 - x^2$ | 14. $y \leq x + 2 $ | 15. $y \geq - x + 3$ |

Respuestas

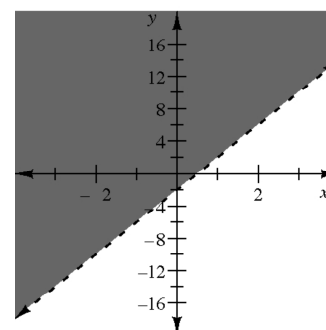
1.



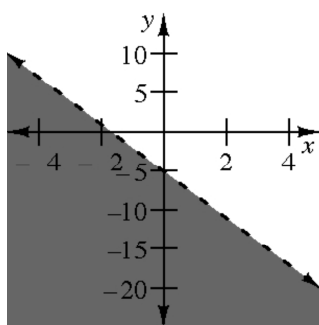
2.



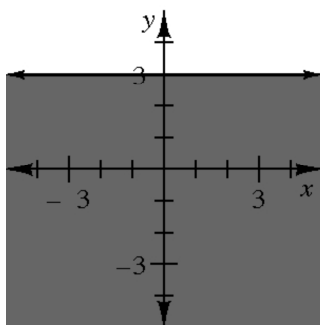
3.



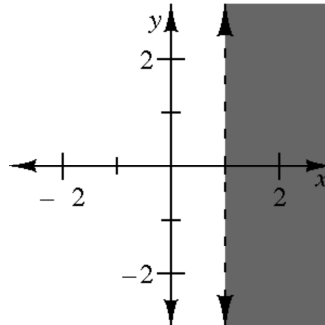
4.



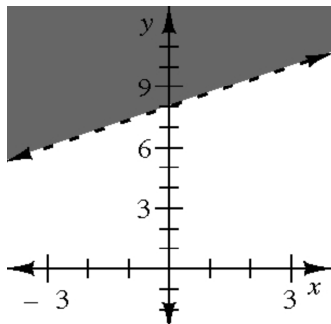
5.



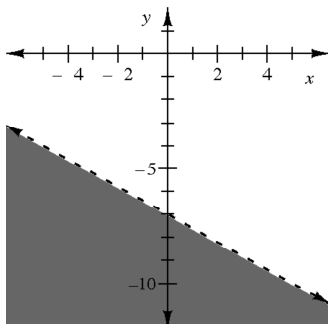
6.



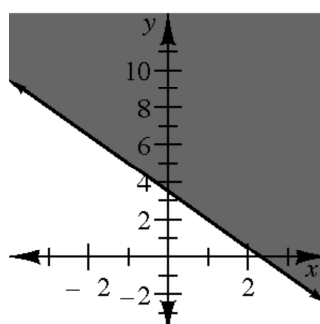
7.



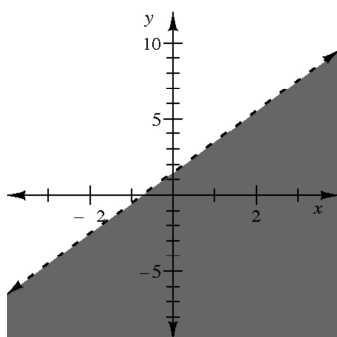
8.



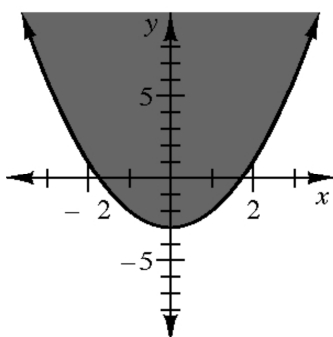
9.



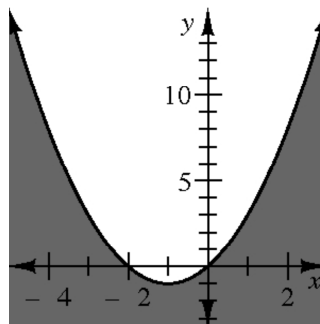
10.



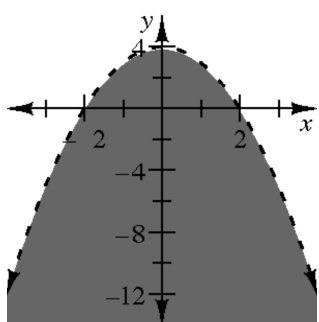
11.



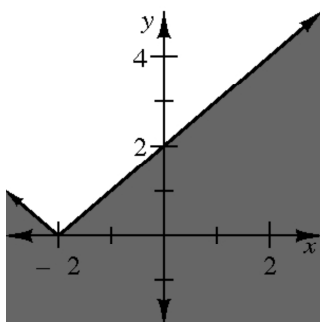
12.



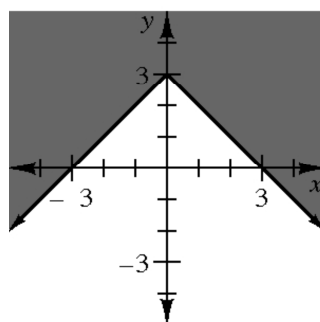
13.



14.



15.



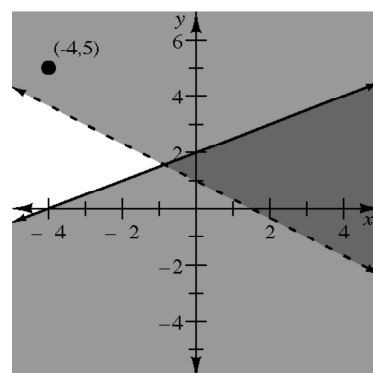
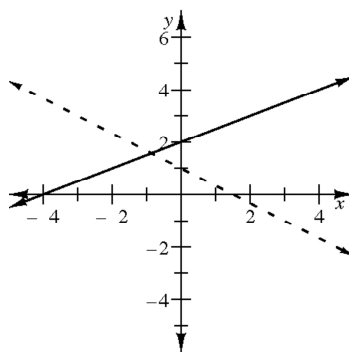
SISTEMAS DE DESIGUALDADES**9.4.1 – 9.4.3**

Para **graficar las soluciones a un sistema de desigualdades**, sigue los mismos pasos detallados en la sección anterior pero hazlo dos veces—una para cada desigualdad. La solución al sistema de desigualdades es la sección en la que las regiones sombreadas de los gráficos de ambas desigualdades se **superponen**.

Ejemplo 1

Grafica las soluciones al sistema $y \leq \frac{1}{2}x + 2$ e $y > -\frac{2}{3}x + 1$.

Grafica las rectas $y = \frac{1}{2}x + 2$ e $y = -\frac{2}{3}x + 1$. La primera es continua y la segunda es punteada. Prueba el punto $(-4, 5)$ en la primera desigualdad.



$$5 \leq \frac{1}{2}(-4) + 2, \text{ entonces } 5 \leq 0$$

Esta desigualdad es falsa, así que sombrea el lado de la recta de frontera opuesto a $(-4, 5)$, es decir, la sección debajo de la recta.

$$5 > -\frac{2}{3}(-4) + 1, \text{ entonces } 5 > \frac{11}{3}$$

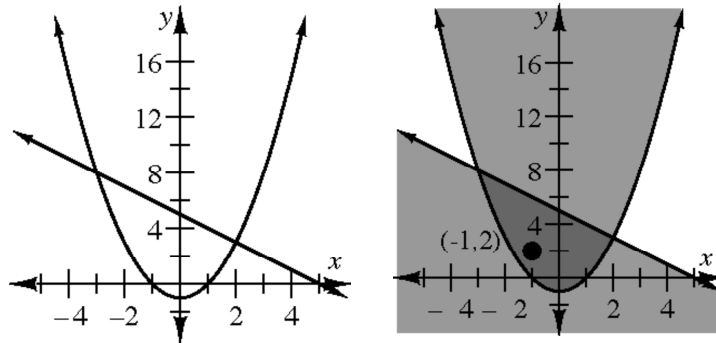
Prueba el mismo punto en la segunda desigualdad. Esta desigualdad es verdadera, así que sombrea el mismo lado de la recta de frontera en el que se encuentra $(-4, 5)$, es decir, por encima de la recta.

Las soluciones son representadas por la sección en la que se superponen las dos regiones sombreadas, indicada con el tono de gris más oscuro en el gráfico de arriba a la derecha.

Ejemplo 2

Grafica las soluciones al sistema $y \leq -x + 5$ e $y \geq x^2 - 1$.

Grafica la recta $y = -x + 5$ y la parábola $y = x^2 - 1$, ambas en forma continua.



$$2 \leq -(-1) + 5, \text{ entonces } 2 \leq 6$$

Prueba el punto $(-1, 2)$ en la primera desigualdad. Esta desigualdad es verdadera, así que sombrea el lado de la recta de frontera en el que se encuentra $(-1, 2)$, es decir, debajo de la recta.

$$2 \geq (-1)^2 - 1, \text{ entonces } 2 \geq 0$$

Prueba el mismo punto en la segunda desigualdad. Esta desigualdad también es verdadera, así que sombrea el lado de la curva de frontera en el que se encuentra $(-1, 2)$, es decir, el interior de la curva.

Las soluciones son representadas por la sección en la que se superponen las dos regiones sombreadas, indicada con el tono de gris más oscuro en el gráfico de arriba a la derecha.

Problemas

Grafica las soluciones a los siguientes pares de desigualdades en los mismos grupos de ejes:

1. $y > 3x - 4$ e $y \leq -2x + 5$

2. $y \geq -3x - 6$ e $y > 4x - 4$

3. $y < -\frac{3}{5}x + 4$ e $y < \frac{1}{3}x + 3$

4. $y < -\frac{3}{7}x - 1$ e $y > \frac{4}{5}x + 1$

5. $y < 3$ e $y > \frac{1}{2}x + 2$

6. $x \leq 3$ e $y < \frac{3}{4}x - 4$

7. $y \leq 2x + 1$ e $y \geq x^2 - 4$

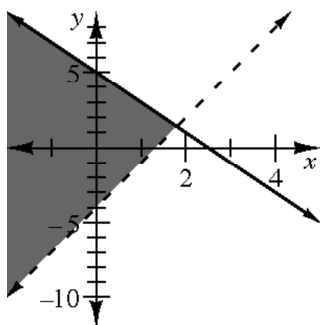
8. $y < -x + 5$ e $y \geq x^2 + 1$

9. $y < -x + 6$ e $y \geq |x - 2|$

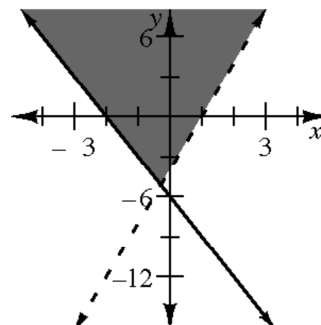
10. $y < -x^2 + 5$ e $y \geq |x| - 1$

Respuestas

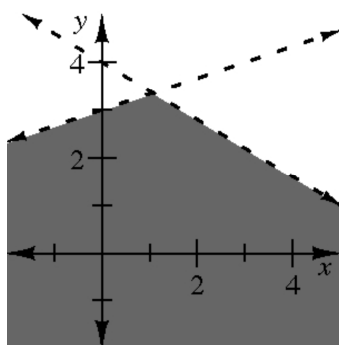
1.



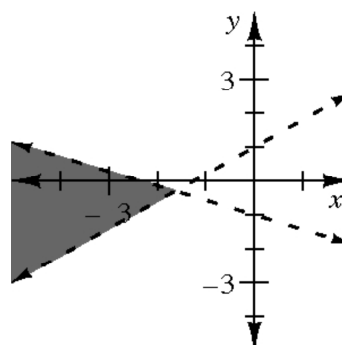
2.



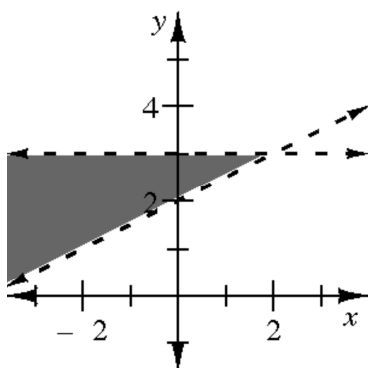
3.



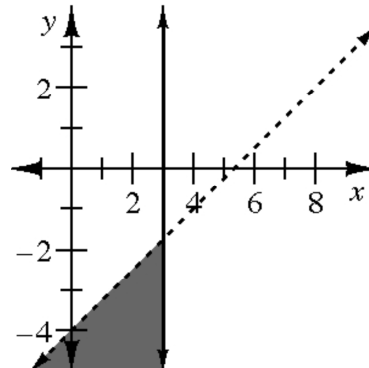
4.



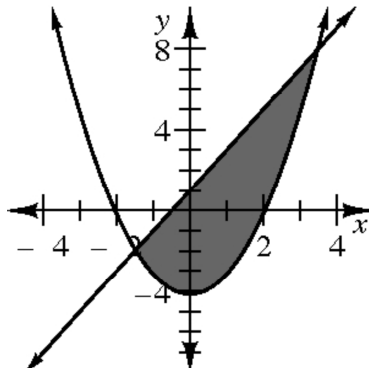
5.



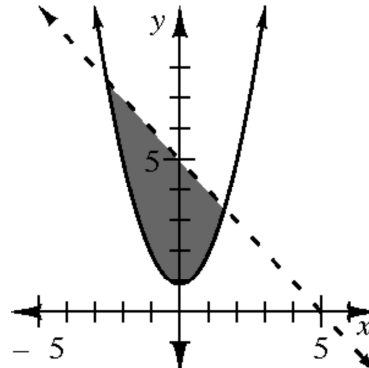
6.

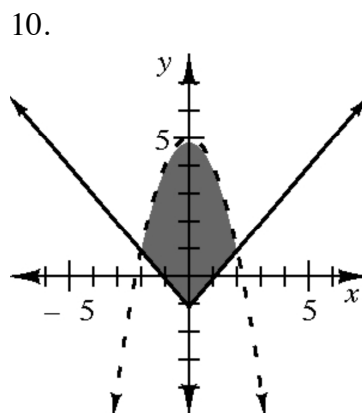
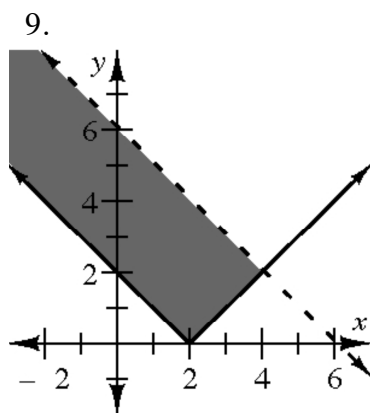


7.



8.





ASOCIACIÓN EN UNA TABLA DE DOBLE ENTRADA**10.1.1**

Los datos basados en medidas como altura, velocidad, y temperatura son *numéricos*. En el Capítulo 6, describiste asociaciones entre dos variables numéricas. Los datos también pueden ser cuentas de porcentajes en categorías específicas como género, religión, o tipo sanguíneo. Este tipo de datos no numéricos recibe el nombre de datos categóricos. Los datos categóricos no pueden ser representados en un diagrama de dispersión, pero hay otras técnicas para buscar relaciones (una asociación) entre variables categóricas, incluyendo diagramas de Venn, gráficos de barra, y tablas de doble entrada.

Ejemplo 1

¿Existe una asociación entre el partido político de un votante y el hecho de que apoye o no una propuesta? Se recabaron los siguientes datos:

	Republicano	Demócrata
Apoya la propuesta	234	286
No apoya la propuesta	162	198
Indeciso	54	66

Solución

Calcula los totales de cada fila y columna:

	Republicano	Demócrata	
Apoya la propuesta	234	286	520
No apoya la propuesta	162	198	360
Indeciso	54	66	120
	450	550	1000

Ahora calcula los porcentajes de cada columna. $234/450 = 52\%$ de los republicanos apoyaron la propuesta. $162/450 = 36\%$ de los republicanos no apoyaron la propuesta, y $54/450 = 12\%$ estaban indecisos. $286/550 = 52\%$ de los demócratas apoyaron la propuesta, $198/550 = 36\%$ no apoyaron la propuesta, y $66/550 = 12\%$ de los demócratas estaban indecisos. Crea una tabla de frecuencia relativa de doble entrada:

	Republicano	Demócrata
Apoya la propuesta	52%	52%
No apoya la propuesta	36%	36%
Indeciso	12%	12%
	100%	100%

Compara los porcentajes en las filas. Todos son iguales, lo que indica que no hay ninguna asociación entre el partido político y la preferencia por la propuesta. El 52% de los votantes apoyaron la propuesta sin importar que fueran demócratas o republicanos.

Ejemplo 2

Una encuesta de 155 alumnos recientemente graduados de secundaria, demostró que 130 de ellos tienen licencias de conducir y 58 de ellos tienen trabajos. Veintiuno de ellos dijo no tener trabajo ni una licencia de conducir. ¿Existe alguna asociación entre tener una licencia de conducir y tener un trabajo entre estos graduados?

Solución

Crea una tabla de doble entrada que muestre las cuentas (la cantidad de graduados) en cada categoría e ingresa la información dada.

	Trabajo	Sin trabajo	
Licencia			130
Sin licencia		21	
	58		155

Suma o resta para completar las cuentas faltantes.

	Trabajo	Sin trabajo	
Licencia	54	76	130
Sin licencia	4	21	25
	58	97	155

Investiga: halla qué porcentaje de los 58 graduados que tienen trabajo tienen una licencia de conducir y qué porcentaje no tiene una licencia de conducir. Luego, halla qué porcentaje de los 97 graduados que no tienen trabajo tienen una licencia de conducir y qué porcentaje no tiene una licencia de conducir. Completa la tabla de la derecha.

	Trabajo	Sin trabajo
Licencia	93%	78%
Sin licencia	7%	22%
	100%	100%

Compara los porcentajes en cada fila. En este caso, los porcentajes en las filas son bastante distintos, lo que indica que existe una asociación entre tener un trabajo y tener una licencia de conducir. El porcentaje de personas con trabajo que tienen licencias (93%) tiende a ser mayor que el porcentaje de personas sin trabajo que tienen licencias (78%). Existe una asociación entre tener un empleo y tener una licencia de conducir.

Problemas

1. En una encuesta realizada a 200 dueños de mascotas, 76 de ellos dijeron no tener un gato y 63 indicaron que no tenían un perro. Ochenta y dos respondieron que tenían un gato y un perro. Crea una tabla de doble entrada con el recuento en cada categoría. ¿Existe alguna asociación entre tener un gato y tener un perro?
2. ¿Existe una asociación entre el estilo de lanzamiento de Parker y las posibilidades de Brandon de llegar a primera base tras batear en un juego de softball? Brandon bateó 32 veces con lanzamientos de Parker. Brandon llegó a primera base 8 veces. Parker usó su bola rápida un total de 12 veces, pero Brandon solo llegó a primera base tres veces en estos casos. Crea una tabla de doble entrada y decide si existe una asociación entre el estilo de lanzamiento y las posibilidades de llegar a primera base.

Respuestas

1.

	Perro	No perro	
Gato	82		
No gato			76
		63	200

	Perro	No perro	
Gato	82	42	124
No gato	55	21	76
	137	63	200

	Perro	No perro
Gato	60%	67%
No gato	40%	33%
	100%	100%

Parece existir una débil asociación entre tener un perro y tener un gato. Las probabilidades de tener un gato son ligeramente menores si tienes un perro. Solo el 60% de los dueños de perros tienen un gato, mientras que el 67% de quienes no tienen un perro tienen un gato. Es decir, es más probable que tengas un gato si no tienes un perro. Así que existe una asociación. La asociación es débil, no hay una diferencia muy grande.

También es posible crear una tabla como la de la derecha. La conclusión de que existe una asociación débil es la misma. Es menos probable que tengas un perro si tienes un gato.

	Gato	No gato
Pero	66%	72%
No perro	34%	28%
	100%	100%

2.

	Parker		
	Bola rápida	Otro lanzamiento	
Brandon llegó a la base	3	5	8
Brandon fue eliminado	9	15	24
	12	20	32

	Parker	
	Bola rápida	Otro lanzamiento
Brandon llegó a la base	25%	25%
Brandon fue eliminado	75%	75%
	100%	100%

No existe ninguna asociación entre el lanzamiento de Parker y la capacidad de Brandon de llegar a primera base. Las probabilidades de que Brandon llegue a primera base son del 25%, sin importar si Parker lanza una bola rápida o no.

También es posible crear una tabla como la de la derecha. La conclusión es la misma; no existe ninguna asociación. Parker usó su bola rápida el 37.5% de las veces, sin importar si Brandon llegó o no a primera base.

	Brandon	
	Llegó a la base	Fue eliminado
Bola rápida	37.5%	37.5%
Otro lanzamiento	62.5%	62.5%
	100%	100%

RESOLVER REESCRIBIENDO: EL MÉTODO DE ROMPE FRACCIONES

10.2.1 y 10.2.2

Las ecuaciones con fracciones y/o decimales pueden ser convertidas en ecuaciones equivalentes sin fracciones y/o decimales y luego resueltas en la forma usual. También es posible simplificar ecuaciones factorizando un factor numérico común de cada término. Las fracciones pueden ser eliminadas de una ecuación multiplicando AMBOS lados (y todos los términos) por el denominador común. Si no puedes determinar fácilmente el denominador común, multiplica toda la ecuación por el producto de todos los denominadores. El término usado para eliminar los denominadores es lo que llamamos un **Rompe fracciones**.

Recuerda también verificar tus respuestas.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 10.2.1 y 10.2.2.

Ejemplo 1

Resuelve: $0.12x + 7.5 = 0.2x + 3$

Multiplica para eliminar los decimales.

$$100 \cdot (0.12x + 7.5 = 0.2x + 3)$$

$$12x + 750 = 20x + 300$$

Resuelve de la forma usual.

$$-8x = -450$$

$$x = 56.25$$

Ejemplo 3

Resuelve: $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} = 7$

Multiplica ambos lados de la ecuación por 6, el denominador común, para eliminar las fracciones.

$$6 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{6} \right) = 6(7)$$

(También habría sido aceptable multiplicar ambos lados por 12).

Distribuye y resuelve de la forma usual.

$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{6} = 6 \cdot 7$$

$$3x + x = 42$$

$$4x = 42$$

$$x = \frac{42}{4} = \frac{21}{2} = 10.5$$

Ejemplo 2

Resuelve: $25x^2 + 125x + 150 = 0$

Divide cada término por 25 (un factor común).

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Resuelve de la forma usual.

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

$$x = -2 \text{ o } x = -3$$

Ejemplo 4

Resuelve: $\frac{5}{2x} + \frac{1}{6} = 8$

Multiplica ambos lados de la ecuación por $6x$, el denominador común, para eliminar las fracciones.

$$6x \cdot \left(\frac{5}{2x} + \frac{1}{6} \right) = 6x(8)$$

(También habría sido aceptable multiplicar ambos lados por $12x$).

Distribuye y resuelve de la forma usual.

$$6x \cdot \frac{5}{2x} + 6x \cdot \frac{1}{6} = 6x \cdot 8$$

$$15 + x = 48x$$

$$15 = 47x$$

$$x = \frac{15}{47} \approx 0.32$$

Problemas

Reescribe cada ecuación en una forma más simple y luego resuelve la nueva ecuación.

1. $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 5$

2. $3000x + 2000 = -1000$

3. $0.02y - 1.5 = 17$

4. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 12$

5. $50x^2 - 200 = 0$

6. $\frac{x}{9} + \frac{2x}{5} = 3$

7. $\frac{3x}{10} + \frac{x}{10} = \frac{15}{10}$

8. $\frac{3}{2x} + \frac{5}{x} = \frac{13}{6}$

9. $x^2 - 2.5x + 1 = 0$

10. $\frac{2}{3x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{36}$

11. $0.002x = 5$

12. $10 + \frac{5}{x} + \frac{3}{3x} = 11$

13. $0.3(x + 7) = 0.2(x - 2)$

14. $x + \frac{x}{2} + \frac{3x}{5} = 21$

15. $32 \cdot 3x - 32 \cdot 1 = 32 \cdot 8$

16. $5 + \frac{2}{x} + \frac{5}{4x} = \frac{73}{12}$

17. $\frac{17}{2x+1} = \frac{17}{5}$

18. $2 + \frac{6}{x} + \frac{6}{3x} = 3$

19. $2.5x^2 + 3x + 0.5 = 0$

20. $\frac{x}{x-2} = \frac{7}{x-2}$

Respuestas

1. $x = 6$

2. $x = -1$

3. $y = 925$

4. $x = \frac{144}{7} \approx 20.57$

5. $x = \pm 2$

6. $x = \frac{135}{23} \approx 5.87$

7. $x = \frac{15}{4} = 3.75$

8. $x = 3$

9. $x = \frac{1}{2}$ o 2

10. $x = -12$

11. $x = 2500$

12. $x = 6$

13. $x = -25$

14. $x = 10$

15. $x = 3$

16. $x = 3$

17. $x = 2$

18. $x = 8$

19. $x = -\frac{1}{5}$ o -1

20. $x = 7$ Nota: x no puede ser 2.

Las ecuaciones pueden ser resueltas de varias formas. En esta sección del libro usamos tres métodos que permiten a los alumnos hallar las soluciones a ecuaciones complejas en formas más eficientes. Estos métodos se llaman **Reescribir**, **Ver adentro**, y **Deshacer**.

El Ejemplo 4 es un recordatorio de que cuando resolvemos una ecuación debemos hallar todas las soluciones. Los problemas con cuadrados pueden tener dos soluciones, una solución o ninguna solución.

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm 12$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

$$(2x + 1)^2 = -7$$

ningún número real elevado
al cuadrado es negativo

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones 10.2.3 y 10.2.6.

Ejemplo 1 Reescribir

Resuelve: $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 3$

Este problema puede reescribirse sin fracciones, usando un rompe fracciones.

$$10 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{5} \right) = 10(3)$$

$$5x + 2x = 30$$

$$7x = 30$$

$$x = \frac{30}{7} \approx 4.29$$

Ejemplo 2 Deshacer

Resuelve: $\sqrt{x} + 1 = 6$

Este problema tiene una raíz cuadrada y una suma, así que restar y elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación puede deshacerla.

$$\sqrt{x} + 1 - 1 = 6 - 1$$

$$\sqrt{x} = 5$$

$$(\sqrt{x})^2 = 5^2$$

$$x = 25$$

Ejemplo 3 Ver adentro

Resuelve: $\frac{x+1}{2} = -6$

Ver adentro de la fracción puede resolver este problema. Ya que $\frac{\text{algo}}{2} = -6$, el numerador debe ser -12 .

$$x + 1 = -12$$

$$x = -13$$

Ejemplo 4 Ver adentro

Resuelve: $|2x + 3| = 11$

Ver adentro del valor absoluto puede resolver este problema. Ya que $|11| = |-11| = 11$,

$$2x + 3 = 11 \text{ o } 2x + 3 = -11.$$

Resolver ambas ecuaciones da dos respuestas:

$$2x = 8 \text{ o } 2x = -14$$

$$x = 4 \text{ o } x = -7$$

Problemas

Halla todas las soluciones posibles a las siguientes ecuaciones:

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|--|
| 1. $\frac{3x+1}{2} = 5$ | 2. $4(x-1) + 3 = 15$ | 3. $\sqrt{2x+5} = 10$ |
| 4. $10 - (x+7) = 5$ | 5. $3(2x-7) = -21$ | 6. $8 + (\frac{y}{2}) = 10$ |
| 7. $\sqrt{x} - 3 = 7$ | 8. $(x+1)^2 = 81$ | 9. $\frac{x}{2} - \frac{x}{5} = 3$ |
| 10. $ x-2 = 5$ | 11. $2\sqrt{x-3} = 8$ | 12. $4(x-1) = 16$ |
| 13. $ 2x+1 = 9$ | 14. $\frac{y+7}{3} = 10$ | 15. $\frac{m}{3} - \frac{2m}{5} = \frac{1}{5}$ |
| 16. $x^2 + 5 = 4$ | 17. $\frac{3y-1}{3} = 10$ | 18. $2(3x-1) + 7 = -13$ |
| 19. $(y-1)^2 = 9$ | 20. $20 - (3x) = 10$ | |

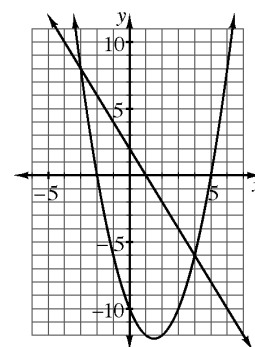
Respuestas

- | | | |
|-----------------------|-------------------------------------|------------------------------|
| 1. $x = 3$ | 2. $x = 4$ | 3. $x = \frac{95}{2} = 47.5$ |
| 4. $x = -2$ | 5. $x = 0$ | 6. $y = 4$ |
| 7. $x = 100$ | 8. $x = 8$ o -10 | 9. $x = 10$ |
| 10. $x = 7$ o -3 | 11. $x = 19$ | 12. $x = 5$ |
| 13. $x = 4$ o -5 | 14. $y = 23$ | 15. $m = -3$ |
| 16. no tiene solución | 17. $y = \frac{31}{3} = 10.\bar{3}$ | 18. $x = -3$ |
| 19. $y = 4$ o -2 | 20. $x = \frac{10}{3}$ | |

Los **puntos de corte e intersecciones** son puntos en los que se cruzan dos caminos, pero un punto de corte es el punto en que una recta o curva cruza un *eje*, mientras que una intersección es cualquier punto en el que se cruzan los gráficos de dos ecuaciones. Es posible estimar los puntos en función de un gráfico dado. Para mayor precisión, casi siempre podemos hallar los puntos de corte e intersecciones algebraicamente.

Ejemplo 1

Usa los gráficos de la parábola $y = x^2 - 3x - 10$ y la recta $y = -2x + 2$ a la derecha. El gráfico muestra que la parábola tiene dos puntos de corte con el eje x $(-2, 0)$ y $(5, 0)$, y un punto de corte con el eje y $(0, -10)$. La recta tiene un punto de corte con el eje x $(1, 0)$, y un punto de corte con el eje y $(0, 2)$. La parábola y la recta se cruzan dos veces, generando dos puntos de intersección: $(-3, 8)$ y $(4, -6)$.



Recuerda que los puntos de corte con el eje x siempre tienen la forma $(x, 0)$ y pueden ser hallados igualando $y = 0$ y calculando x . Los puntos de corte con el eje y siempre tienen la forma $(0, y)$, y pueden ser hallados igualando $x = 0$ y calculando y . Para hallar los puntos de intersección, resuelve el sistema. Observa las soluciones algebraicas a continuación.

Puntos de corte

Para hallar los puntos de corte con el eje x de la parábola, iguala $y = 0$ y calcula x .

$$0 = x^2 - 3x - 10$$

Factoriza y usa la Propiedad de producto cero.

$$0 = (x - 5)(x + 2)$$

$$x = 5 \text{ o } x = -2,$$

así que $(5, 0)$ y $(-2, 0)$ son los puntos de corte con el eje x .

Para hallar los puntos de corte con el eje y de la parábola, iguala $x = 0$ y calcula y .

$$y = 0^2 - 3 \cdot 0 - 10 = -10$$

así que $(0, -10)$ es el punto de corte con el eje y .

Para hallar los puntos de corte con los ejes x e y de la recta, sigue el mismo procedimiento.

Si $x = 0$, entonces $y = -2 \cdot 0 + 2 = 2$, así que $(0, 2)$ es el punto de corte con el eje y .

Si $y = 0$, entonces $0 = -2x + 2$, y $x = 1$ así que $(1, 0)$ es el punto de corte con el eje x .

Puntos de intersección

Para hallar los puntos de intersección del sistema de ecuaciones, usa el Método de igualación de sistemas de ecuaciones o el Método de sustitución.

$$x^2 - 3x - 10 = -2x + 2$$

Iguala un lado a cero, factoriza y usa la Propiedad de producto cero para calcular x (también puedes usar la Fórmula cuadrática).

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x = 4 \text{ o } x = -3$$

Sustituir $x = 4$ en cualquier ecuación arroja $y = -6$, así que $(4, -6)$ es un punto de intersección.

Sustituir $x = -3$ en cualquier ecuación arroja $y = 8$, así que $(-3, 8)$ es un punto de intersección.

Ejemplo 2

Determina los puntos de corte e intersecciones de las rectas $y = \frac{1}{3}x + 8$ e $y = \frac{1}{2}x - 3$ sin graficarlas. Usa el mismo método demostrado en el Ejemplo 1:

Puntos de corte

Para la recta $y = \frac{1}{3}x + 8$:

Si $x = 0$, entonces $y = \frac{1}{3} \cdot 0 + 8 = 8$,
así que $(0, 8)$ es el punto de corte con el eje y .

Si $y = 0$, $0 = \frac{1}{3}x + 8$, y $x = -24$, entonces
 $(-24, 0)$ es el punto de corte con el eje x .

Para la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$:

Si $x = 0$, entonces $y = \frac{1}{2} \cdot 0 - 3 = -3$,
así que $(0, -3)$ es el punto de corte con el eje y .

Si $y = 0$, entonces $0 = \frac{1}{2}x - 3$, y $x = 6$,
así que $(6, 0)$ es el punto de corte con el eje x .

Intersección

$$\frac{1}{3}x + 8 = \frac{1}{2}x - 3$$

$$6 \cdot \left(\frac{1}{3}x + 8 = \frac{1}{2}x - 3 \right)$$

$$2x + 48 = 3x - 18$$

$$66 = x$$

Substituir x por 66 en cualquiera de las ecuaciones originales arroja $y = 30$.

El punto de intersección es $(66, 30)$.

Problemas

Determina los puntos de corte con los ejes x e y de las siguientes ecuaciones:

1. $y = 3x - 2$

2. $y = \frac{1}{4}x - 2$

3. $3x + 2y = 12$

4. $-x + 3y = 15$

5. $2y = 15 - 3x$

6. $y = x^2 + 5x + 6$

7. $y = x^2 - 3x - 10$

8. $y = 4x^2 - 11x - 3$

9. $y = x^2 + 3x - 2$

Determina los puntos de intersección:

10. $y = 5x + 1$

$y = -3x - 15$

11. $y = x + 7$

$y = 4x - 5$

12. $x = 7 + 3y$

$x = 4y + 5$

13. $x = -\frac{1}{2}y + 4$

$8x + 3y = 31$

14. $4x - 3y = -10$

$x = \frac{1}{4}y - 1$

15. $2x - y = 6$

$4x - y = 12$

16. $y = x^2 - 3x - 8$

$y = 2$

17. $y = x^2 - 7$

$y = 8 + 2x$

18. $y = x^2 + 2x + 8$

$y = -4x - 1$

Respuestas

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $(0.\overline{6}, 0), (0, -2)$ | 2. $(8, 0), (0, -2)$ | 3. $(4, 0), (0, 6)$ |
| 4. $(-15, 0), (0, 5)$ | 5. $(5, 0), (0, 7.5)$ | 6. $(-2, 0), (-3, 0), (0, 6)$ |
| 7. $(5, 0), (-2, 0), (0, -10)$ | 8. $(-0.25, 0), (3, 0), (0, -3)$ | 9. $(0.56, 0), (-3.56, 0), (0, -2)$ |
| 10. $(-2, -9)$ | 11. $(4, 11)$ | 12. $(13, 2)$ |
| 13. $(3.5, 1)$ | 14. $(-0.25, 3)$ | 15. $(3, 0)$ |
| 16. $(5, 2), (-2, 2)$ | 17. $(5, 18), (-3, 2)$ | 18. $(-3, 11)$ |

RESOLVER DESIGUALDADES CUADRÁTICAS Y CON VALORES ABSOLUTOS

10.3.3

Existen varios métodos para resolver desigualdades cuadráticas y con valores absolutos, pero un método que funciona para todos los tipos de desigualdades consiste en convertir la desigualdad en una ecuación, resolverla, y luego graficar las soluciones en una recta numérica. Las soluciones, llamadas “puntos frontera”, dividen la recta numérica en regiones. Prueba un punto cualquiera de cada región en la desigualdad *original*. Si ese punto hace que la desigualdad sea verdadera, entonces todos los puntos en esa región son soluciones. Si ese punto hace que la desigualdad sea falsa, entonces ninguno de los puntos en esa región es una solución. Los puntos frontera pueden estar incluidos ($\geq$ o $\leq$) o excluidos ($>$ o $<$) de la solución dependiendo el signo de desigualdad usado.

Resolver una desigualdad cuadrática o de valor absoluto es muy similar a resolver una desigualdad lineal con una variable, pero suele haber tres o más regiones de solución en la recta numérica en lugar de solo dos. Para más información sobre la resolución de desigualdades lineales, consulta la sección “Resolución de desigualdades con una variable (9.2.1 y 9.2.2)” de esta *Guía para padres con práctica adicional*.

Ejemplo 1

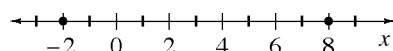
Resuelve: $|x - 3| \leq 5$

Conviértela en una ecuación y resuelve.

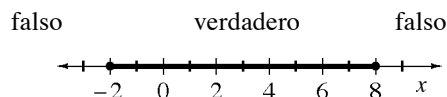
$$|x - 3| = 5$$

$$x - 3 = 5 \text{ o } x - 3 = -5$$

$$x = 8 \text{ o } x = -2 \text{ (los puntos de frontera)}$$



Elige $x = -3$, $x = 0$, y $x = 9$ para probarlos en la desigualdad original. $x = -3$ es falso, $x = 0$ es verdadero, y $x = 9$ es falso.



La solución son todos los números mayores o iguales que -2 y menores o iguales que 8 , lo que se escribe como $-2 \leq x \leq 8$.

Ejemplo 2

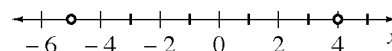
Resuelve: $|2y + 1| > 9$

Conviértela en una ecuación y resuelve.

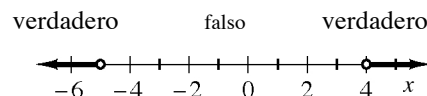
$$|2y + 1| = 9$$

$$2y + 1 = 9 \text{ o } 2y + 1 = -9$$

$$y = 4 \text{ o } y = -5 \text{ (los puntos de frontera)}$$



Elige $y = -6$, $y = 0$, e $y = 5$ para probarlos en la desigualdad original. $y = -6$ es verdadero, $y = 0$ es falso, e $y = 5$ es verdadero.



La solución son todos los números menores que -5 o mayores que 4 , lo que se escribe como $y < -5$ o $y > 4$.

Ejemplo 3

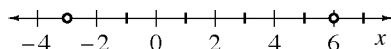
Resuelve: $x^2 - 3x - 18 < 0$

Conviértela en una ecuación y resuelve.

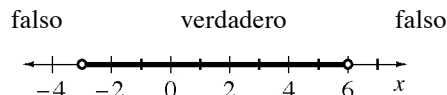
$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(x - 6)(x + 3) = 0$$

$$x = 6 \text{ o } x = -3 \text{ (los puntos de frontera)}$$



Elige $x = -4$, $x = 0$, y $x = 7$ para probarlos en la desigualdad original. $x = -4$ es falso, $x = 0$ es verdadero, y $x = 7$ es falso.



La solución son todos los números mayores que -3 y menores que 6 , lo que se escribe como $-3 < x < 6$.

Ejemplo 4

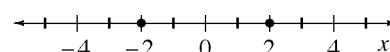
Resuelve: $m^2 - 3 \geq 1$

Conviértela en una ecuación y resuelve.

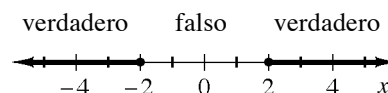
$$m^2 - 3 = 1$$

$$m^2 = 4$$

$$m = \pm 2 \text{ (los puntos de frontera)}$$



Elige $m = -3$, $m = 0$, y $m = 3$ para probarlos en la desigualdad original. $m = -3$ es verdadero, $m = 0$ es falso, y $m = 3$ es verdadero.



La solución son todos los números menores o iguales que -2 o mayores o iguales que 2 , lo que se escribe como $m \leq -2$ o $m \geq 2$.

Problemas

Resuelve las siguientes desigualdades:

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|------------------------|
| 1. $ x + 4 \geq 7$ | 2. $x^2 + 6x + 8 < 0$ | 3. $y^2 - 5y > 0$ |
| 4. $ x - 5 \leq 8$ | 5. $ x - 5 \leq 8$ | 6. $y^2 - 5y < 0$ |
| 7. $ 4r - 2 > 8$ | 8. $x^2 - 3x - 4 < 0$ | 9. $ 3x \leq 12$ |
| 10. $-x^2 - 9x - 14 < 0$ | 11. $ 1 - 3x \leq 13$ | 12. $y^2 \leq 16$ |
| 13. $ 2x - 3 > 15$ | 14. $3x^2 + 7x - 6 \geq 0$ | 15. $ 5x > -15$ |
| 16. $-2 x - 3 + 6 < -4$ | 17. $x^2 + 4x - 8 < 4$ | 18. $y^2 + 6y + 9 > 0$ |
| 19. $ 4 - d \leq 7$ | 20. $x(7x - 26) \leq 8$ | |

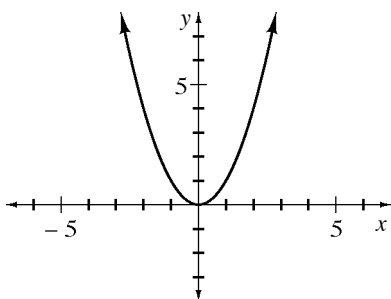
Respuestas

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $x \geq 3$ o $x \leq -11$ | 2. $-4 < x < -2$ | 3. $y < 0$ o $y > 5$ |
| 4. $-13 \leq x \leq 13$ | 5. $-3 \leq x \leq 13$ | 6. $0 < y < 5$ |
| 7. $r < -\frac{3}{2}$ o $r > \frac{5}{2}$ | 8. $-1 < x < 4$ | 9. $-4 \leq x \leq 4$ |
| 10. $x < -7$ o $x > -2$ | 11. $-4 < x < \frac{14}{3}$ | 12. $-4 \leq y \leq 4$ |
| 13. $x < -6$ o $x > 9$ | 14. $x \leq -3$ o $x \geq \frac{2}{3}$ | 15. todos los números |
| 16. $x > 8$ o $x < -2$ | 17. $-6 < x < 2$ | 18. todos los números
excepto $y = -3$ |
| 19. $-3 \leq d \leq 11$ | 20. $-\frac{2}{7} \leq x \leq 4$ | |

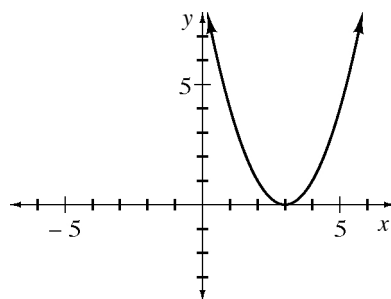
La ecuación más simple de una forma (recta, parábola, valor absoluto, etc.) es lo que llamamos una ecuación madre. Modificar una ecuación madre agregando una suma o multiplicación desplaza y cambia el tamaño y la orientación del gráfico madre pero no altera su forma básica. Estos cambios reciben el nombre de **transformaciones**. El primer conjunto de ejemplos muestra cómo puedes mover el gráfico madre de una parábola en un sistema de coordenadas xy . En cursos futuros, aprenderás a hacer que una parábola sea más ancha o más angosta. Los demás tipos de funciones se transforman en formas similares.

Ejemplos

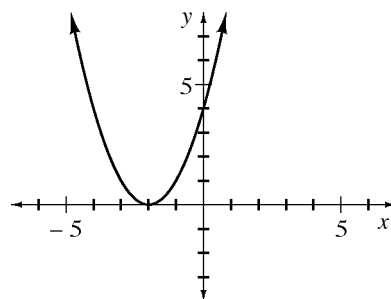
$f(x) = x^2$
el gráfico madre



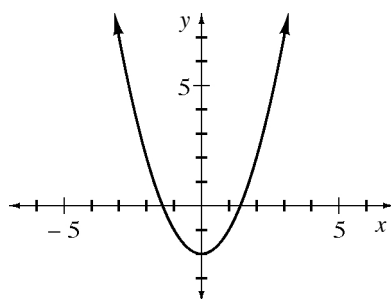
$f(x-3) = (x-3)^2$
3 unidades a la derecha



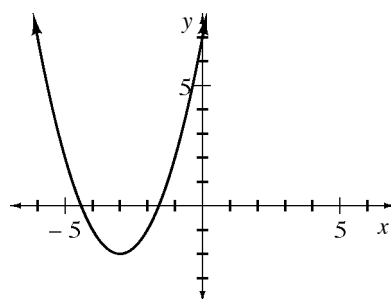
$f(x+2) = (x+2)^2$
2 unidades a la izquierda



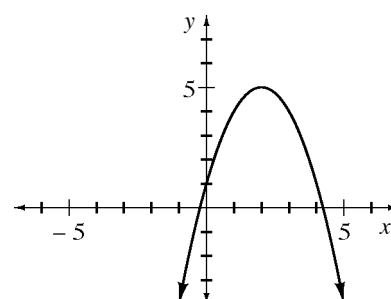
$f(x)-2 = x^2-2$
2 unidades hacia abajo



$f(x+3)-2 = (x+3)^2-2$
3 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia abajo



$-f(x-2)+5 = -(x-2)^2+5$
2 unidades a la derecha, 5 unidades hacia arriba, y reflejada respecto del eje x .

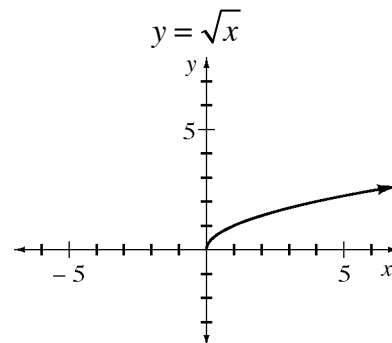
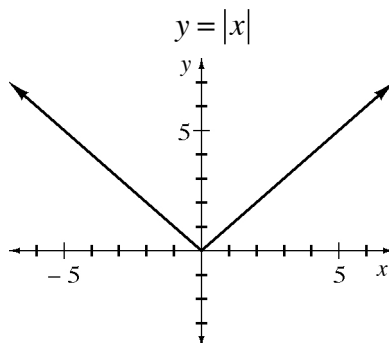


Problemas

Predice cómo se diferenciará cada parábola de su gráfico madre. El gráfico madre de todos estos problemas es $f(x) = x^2$.

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| 1. $y = f(x + 5)$ | 2. $y = f(x) + 5$ | 3. $y = -f(x)$ |
| 4. $y = f(x) - 4$ | 5. $y = f(x - 5)$ | 6. $y = -f(x + 2)$ |
| 7. $y = f(x - 5) - 3$ | 8. $y = -f(x + 2) + 1$ | 9. $y = f(x - 3) - 5$ |

A la derecha, puedes ver los gráficos madre de las funciones con valores absolutos y raíces cuadradas. Se transforman de la misma forma que las parábolas. Predice en qué se diferenciará el gráfico de cada ecuación a continuación del gráfico madre.



- | | | |
|---|--|---|
| 10. $f(x - 4)$ donde $f(x) = x $ | 11. $f(x) + 5$ donde $f(x) = \sqrt{x}$ | 12. $f(x) + 3$ donde $f(x) = x $ |
| 13. $f(x + 2)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$ | 14. $-f(x) + 5$ donde $f(x) = x $ | 15. $-f(x)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$ |
| 16. $-f(x + 3)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$ | 17. $-f(x - 5)$ donde $f(x) = x $ | 18. $-f(x - 2) + 5$ donde $f(x) = \sqrt{x}$ |
| 19. $f(x) + 3$ donde $f(x) = \sqrt{x}$ | 20. $f(x - 7)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$ | 21. $-f(x + 3) + 7$ donde $f(x) = x $ |

Respuestas

- | | | |
|--|---|--|
| 1. 5 a la izquierda | 2. 5 hacia arriba | 3. reflejada respecto del eje x |
| 4. 4 hacia abajo | 5. 5 hacia izquierda | 6. 2 a la izquierda, reflejada respecto del eje x |
| 7. 5 a la derecha, 3 hacia abajo | 8. 2 a la izquierda, 1 hacia arriba, reflejada respecto del eje x | 9. 3 a la derecha, 5 hacia abajo |
| 10. 4 a la derecha | 11. 5 hacia arriba | 12. 3 hacia arriba |
| 13. 2 a la izquierda | 14. 5 hacia arriba, reflejada respecto del eje x | 15. reflejada respecto del eje x |
| 16. 3 a la izquierda, reflejada respecto del eje x | 17. 5 a la derecha, reflejada respecto del eje x | 18. 2 a la derecha, 5 hacia arriba, reflejada respecto del eje x |
| 19. 3 hacia arriba | 20. 7 a la derecha | 21. 3 a la izquierda, 7 hacia arriba, reflejada respecto del eje x |

Las distribuciones de datos pueden representarse gráficamente con histogramas y diagramas de cajas. Los diagramas de cajas se describen en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 11.2.1. Para más ayuda con los histogramas, consulta la *Guías para padres con práctica adicional* para Lección 1.1.4 de *Core Connections en español, Curso 1*, disponible sin cargo en cpm.org.

Dos distribuciones de datos se pueden comparar por medio de su centro, forma, dispersión y valores atípicos.

El centro, o valor “típico” de una distribución de datos, se puede describir usando la mediana. Si la distribución es simétrica y no presenta valores atípicos, el centro se puede describir utilizando la media.

Puedes hallar las formas comunes de las distribuciones de datos en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 11.2.2.

La dispersión de una distribución puede describirse con el rango intercuartil (RIC), descrito en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 11.2.1, o la desviación estándar, descrita en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 11.2.3. Ya que la desviación estándar se basa en la media, solo se debería usar para describir la dispersión de distribuciones simétricas sin valores atípicos.

Un valor atípico es un dato que se encuentra muy alejado de la mayoría de los datos.

Ejemplo 1

Los profesores de las universidades privadas se quejan de que las clases de Literatura Inglesa de las universidades públicas no son suficientemente exigentes. Específicamente, los profesores afirman que los cursos de literatura en las universidades públicas no asignan suficientes novelas a los alumnos para leer. Una estadística de alumnos de universidades públicas recabó los datos a continuación sobre 42 cursos de literatura en universidades públicas y privadas del estado. Compara la cantidad de novelas leídas en los dos tipos de universidades.

Cantidad de novelas asignadas en cursos de literatura de universidades públicas:

13, 10, 15, 12, 14, 9, 11, 15, 12, 14, 9, 10, 13, 15, 12, 9, 11, 15, 12, 10, 15, 14 *Total: 270*

Cantidad de novelas asignadas en cursos de literatura de universidades privadas:

11, 8, 14, 13, 25, 11, 7, 13, 8, 16, 11, 10, 20, 7, 8, 13, 14, 16, 18, 10 *Total: 253*

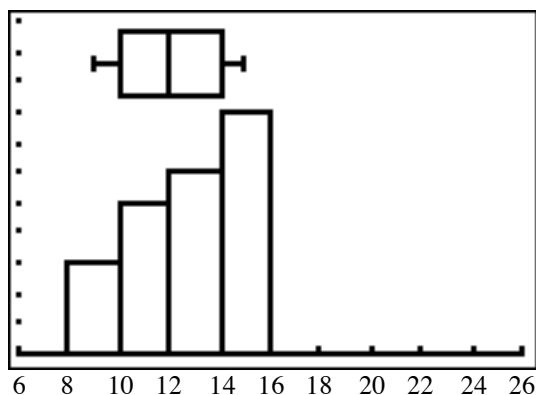
La solución continúa en la página siguiente →

Solución

Todo análisis de una distribución de datos debería comenzar con una representación gráfica de los datos. Para los histogramas de abajo se eligió un intervalo de dos. A fin de que sea posible comparar ambas distribuciones, ambos gráficos tienen la misma escala en el eje x , y fueron graficados uno sobre el otro. Si necesitas ayuda con el uso de una calculadora TI-83+/84+, consulta tu libro digital o studenthelp.cpm.org.

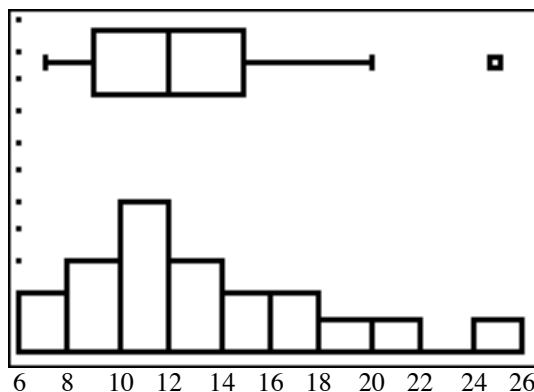
El *total* se utiliza para verificar que los datos hayan sido ingresados correctamente en el dispositivo de graficación. La suma del conjunto de datos, determinada por las funciones estadísticas de la calculadora, debería coincidir con el valor *total* dado.

Universidad pública



Síntesis de cinco números
(9, 10, 12, 14, 15)

Universidad privada



Síntesis de cinco números
(7, 9, 12, 15, 25)

Al comparar las distribuciones, deberías considerar su centro, forma, dispersión, y valores atípicos. Ya que ninguna de las distribuciones es simétrica y una de las distribuciones tiene un valor atípico, no sería apropiado compararlas utilizando las medias o desviaciones estándar. Las síntesis de cinco números (consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 11.2.1) fueron incluidas a la derecha de cada gráfico.

Centro: Ambos tipos de universidades asignan la misma mediana de 12 novelas.

La solución continúa en la página siguiente →

Continuación de la solución de la página anterior.

Forma: la distribución para las universidades públicas es sesgada, con un mínimo de entre 8 y 9 novelas que aumenta hasta un máximo de 14 a 15 novelas. La distribución en las universidades privadas es sesgada en la otra dirección, con un máximo de entre 10 y 11 novelas.

Dispersión: la variabilidad en la cantidad de novelas asignadas en las universidades públicas es mucho menor que la variabilidad entre cursos en universidades privadas. El rango intercuartil para las universidades públicas es de 4 novelas ($14 - 10 = 4$), mientras que el rango intercuartil para las universidades privadas, de 6 ($15 - 9 = 6$), es un 50% más amplio.

Valores atípicos: un curso en una universidad privada es un valor atípico; en él se asignan 25 libros. El valor de 25 libros se aleja mucho de la mayoría de los datos para universidades privadas. Las calculadoras TI-83/84+ pueden señalar valores atípicos en un diagrama de cajas con puntos.

Conclusiones: los profesores de universidades privadas afirman que sus cursos son más exigentes porque asignan más novelas. Sin embargo, los datos no respaldan esa afirmación. El 25% de los cursos de universidades privadas asignan más novelas que cualquiera de los cursos de universidades públicas (el valor en el extremo derecho, o el 25% superior de los cursos de las universidades privadas, se encuentra fuera del diagrama de cajas de las universidades públicas). Pero el 25% de las clases en universidades privadas asignan *menos* libros que cualquiera de las universidades públicas (el valor en el extremo izquierdo, o el 25% inferior de las universidades privadas, se encuentra *debajo* del diagrama de cajas de las universidades públicas). Asimismo, la mediana de novelas asignadas en los dos tipos de universidades es igual: 12 libros. La cantidad de novelas asignadas en las universidades públicas es más consistente (el rango intercuartil es 4) que la cantidad de novelas asignadas en las universidades privadas (el rango intercuartil es 6).

Ejemplo 2

Un criador de conejos registró la cantidad de crías de cinco conejas este año. Estas tuvieron 243, 215, 184, 280, y 148 crías, respectivamente. Muestra cómo calcular la media y la desviación estándar de la cantidad de crías por coneja sin usar las funciones estadísticas de tu calculadora.

La media es $\frac{243+215+184+280+148}{5} = 214$ crías.

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la distancia promedio hasta la media, después de que las distancias han sido hechas positivas elevándolas al cuadrado. Para hallar la desviación estándar, primero hallar la distancia a la que se halla cada coneja de la media:

$$243 - 214 = 29, 215 - 214 = 1, 184 - 214 = -30, 280 - 214 = 66, 148 - 214 = -66.$$

Halla el cuadrado de cada distancia: $29^2 = 841, 1^2 = 1, (-30)^2 = 900, 66^2 = 4356, (-66)^2 = 4356$.

La distancia media cuadrada es: $\frac{841+1+900+4356+4356}{5} = 2090.8$

La raíz cuadrada es 45.725. Ya que las medidas originales eran números enteros, el resultado final también debería ser un entero. La cantidad media de crías por coneja es de 214, con una desviación estándar de 46 crías.

Problemas

1. Los distintos tipos de sapos suelen poner distintas cantidades de huevos. Los datos de abajo corresponden a dos especies distintas. Compara la cantidad de huevos puestos por el sapo americano y el sapo de Fowler. ¿Es apropiado sintetizar las distribuciones usando la media y la desviación estándar? Usa un intervalo de 250 huevos.

Sapo americano: 9100, 8700, 10300, 9500, 7800, 8900, 9200, 9300, 8900, 8300, 9400, 8000, 9000, 8400, 9700, 10000, 8600, 8900, 9900, 9300 *Total: 181,200.*

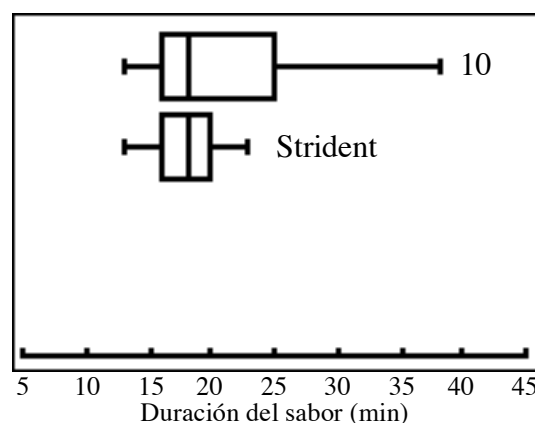
Sapo de Fowler: 9500, 9100, 9400, 8800, 9000, 8400, 9200, 9200, 8900, 9100, 8600, 9200, 8700, 9800, 9300, 8800, 9200, 9300, 9000, 9100 *Total: 181,600.*

2. Sin usar las funciones estadísticas de tu calculadora, halla la desviación estándar de la cantidad de huevos puestos por cada uno de los cinco primeros sapos americanos.
3. ¿Los bebés que pesan menos al nacer comienzan a gatear más tarde que los bebés nacidos con el peso promedio correspondiente? Un psicólogo recabó los datos de abajo sobre la edad a la que los niños comienzan a gatear:

Bebés de peso bajo: 10, 12, 11, 11, 7, 13, 10, 12, 11, 13, 10, 11, 15, 11, 14, 10 meses
Total: 181.

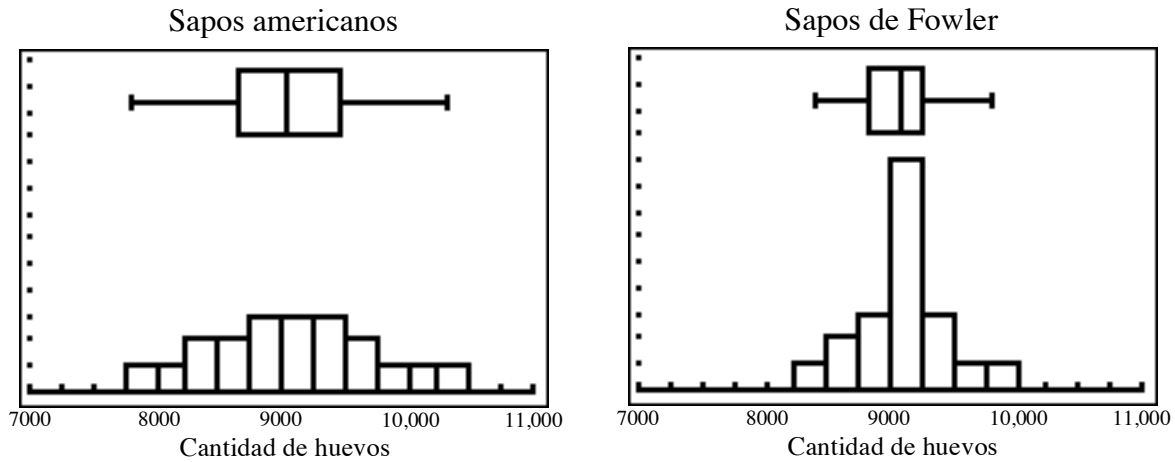
Bebés de peso promedio: 7, 6, 13, 9, 8, 7, 5, 7, 9, 8, 10, 8, 11, 7, 7, 10, 6, 8, 7, 6, 12, 8, 7 meses
Total: 186.

4. Compara la cantidad de tiempo que duró el sabor de una goma de mascar marca “10” con la cantidad de tiempo que duró el sabor de una goma de mascar marca “Strident”. Observa el gráfico de la derecha. Estima la media para cada tipo de goma de mascar.



Respuestas

1.

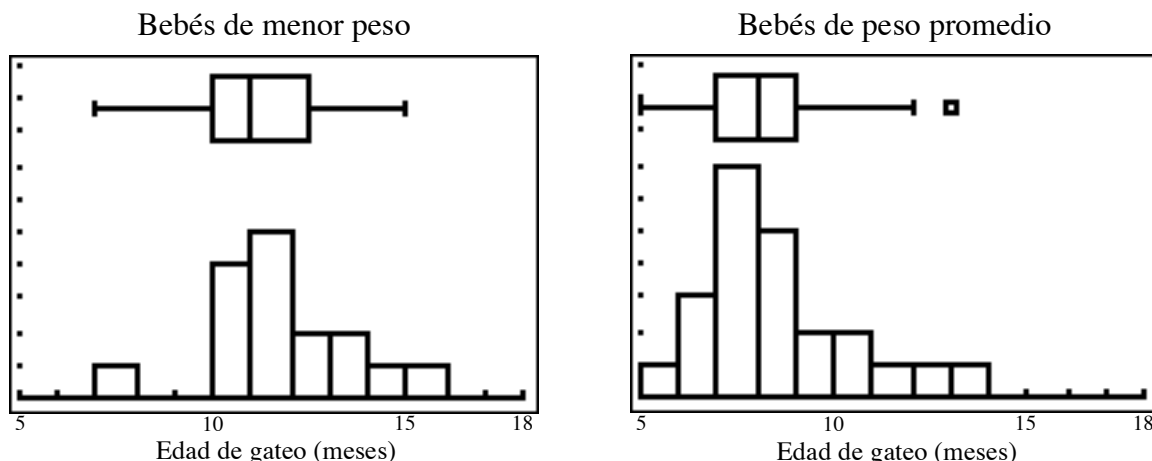


La media y la desviación estándar son estadísticas apropiadas porque ambas distribuciones son bastante simétricas y no presentan valores atípicos.

Ambos sapos ponen una media de entre 9000 y 9100 huevos. Ambas distribuciones presentan un solo pico, son simétricas, y no presentan valores atípicos aparentes. Sin embargo, hay mucha más variabilidad en la cantidad de huevos puestos por el sapo americano. La desviación estándar para el sapo americano es aproximadamente 637, mientras que la desviación estándar para el sapo de Fowler es aproximadamente la mitad, cerca de 316 huevos.

2.
$$\sqrt{\frac{20^2 + (-380)^2 + 1220^2 + 420^2 + (-1280)^2}{5}} \approx 830 \text{ huevos}$$

3.



La mediana y el rango intercuartil se utilizarán para comparar las estadísticas porque la mediana y la desviación estándar no son apropiadas, ambas distribuciones son sesgadas y presentan un valor atípico.

La mediana de las edades a las que los bebés de menor peso comienzan a gatear es 11 meses, mientras que la mediana para los bebés de peso promedio es 8 meses.

Ambas distribuciones presentan un solo pico y son sesgadas. Los bebés de menor peso parecen tener un valor atípico en 7 meses, si bien la calculadora no lo identifica como un verdadero valor atípico. Los bebés de peso promedio tienen un valor atípico en 13 meses.

La variabilidad en la edad de gateo es casi igual para los bebés de menor peso (el rango intercuartil es 2.5 meses) y los bebés de peso promedio (el rango intercuartil es 2 meses).

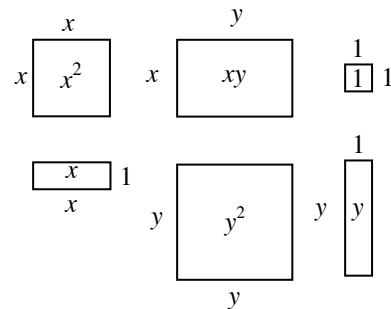
Los bebés de menor peso tienen un desarrollo retrasado por aproximadamente 3 meses. Cerca del 75% de los bebés de menor peso no han comenzado a gatear a la edad a la que el 75% de los bebés de peso promedio ya gatean.

4. La mediana para ambos tipos de goma de mascar es de aproximadamente 18 minutos de sabor. Los tiempos de “10” eran sesgados, mientras que los de Strident eran simétricos. La mitad inferior de las distribuciones para ambas gomas de mascar fue la misma, pero hubo mucha más variabilidad en la mitad superior de “10” que en la mitad superior de Strident. De hecho, más del 25% de quienes comieron “10” dijeron que el sabor duró más que cualquier consumidor de Strident. Ninguna goma de mascar presentó valores atípicos.

Hubo más variabilidad en la duración del sabor de “10” — El rango intercuartil fue de aproximadamente 9 minutos ($25 - 16 = 9$). El rango intercuartil de Strident, 4 minutos ($20 - 16 = 4$), fue menos de la mitad del de “10”. Esa variabilidad es una ventaja. Si comes goma de mascar marca “10”, no te irá peor que si comes Strident, y tendrás sabor por mucho más tiempo.

La media para Strident es aproximadamente igual a la mediana, ya que la distribución es simétrica, aproximadamente 18 minutos. Pero la media para “10” es de más de 18 minutos porque la dispersión es sesgada, tal vez unos 22 minutos.

Los azulejos algebraicos son una parte importante de este curso y los usaremos en todos los capítulos. Los azulejos permiten a los alumnos “ver” expresiones algebraicas abstractas y ecuaciones con dos variables. El uso regular de azulejos algebraicos permite a los alumnos comprender conceptos abstractos mediante el uso de representaciones físicas concretas.



En las figuras de la derecha pueden verse las dimensiones de cada azulejo junto a sus lados, y sus áreas en su interior. Los azulejos algebraicos reciben sus nombres de sus áreas. Por ejemplo, el azulejo x^2 , en la esquina superior izquierda, tiene un área de x^2 .

En diagramas con combinaciones de azulejos, como los de los Ejemplos 1 a 3 a continuación, el perímetro es la distancia alrededor del exterior de una figura. El área de una figura es la suma de las áreas de los azulejos individuales.

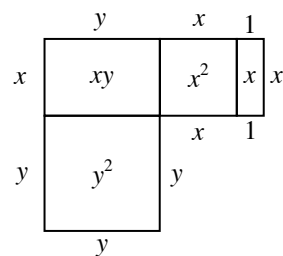
En las expresiones algebraicas como las de los Ejemplos 4 a 6 a continuación, la agrupación de términos que tienen la misma área para escribir una expresión más simple es lo que llamamos **agrupación de términos semejantes**.

Para más información, consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones A.1.1, A.1.2 y A.1.5.

Los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones A.1.3 y A.1.4 pueden ayudar a comprender el proceso de evaluación de expresiones. Los alumnos evalúan expresiones en sus tareas y en el Punto de comprobación 2.

Puedes encontrar una página de recursos que te permitirá crear azulejos algebraicos en el sitio web de CPM, cpm.org. Dirígete a la sección de alumnos y descarga la Página de Recursos de la Lección A.1.1.

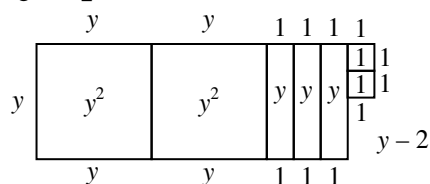
Ejemplo 1



Perímetro = $y + x + 1 + x + 1 + x + y + y + y + x = 4x + 4y + 2$
(en sentido horario desde la esquina superior izquierda)

Área = $x^2 + xy + y^2 + x$

Ejemplo 2



Perímetro = $y + y + 7 + (y - 2) + 3 + y + y + y = 6y + 8$
(en sentido horario desde la esquina superior izquierda)

$$\text{Área} = y^2 + y^2 + y + y + y + 1 + 1 = 2y^2 + 3y + 2$$

Ejemplo 3

x^2	x^2	x^2	x
x	x	x	1
x	x	x	1

$$\text{Perímetro} = 8x + 6$$

$$\text{Área} = 3x^2 + 7x + 2$$

Ejemplo 4

La expresión $3x^2 + 7x + 2 + x^2 + 5 + 2x$ puede ser rescrita como $3x^2 + x^2 + 7x + 2x + 2 + 5$ y simplificada agrupando términos semejantes para obtener $4x^2 + 9x + 7$.

Ejemplo 5

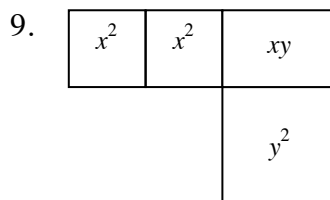
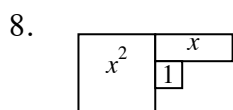
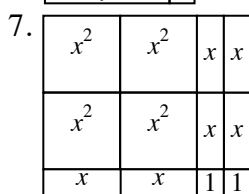
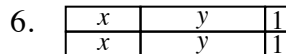
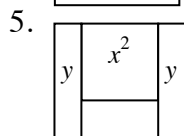
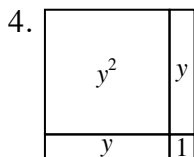
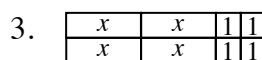
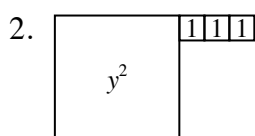
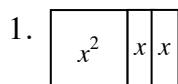
La expresión $x^2 + xy + y^2 + 3xy + y^2 + 7$ puede ser rescrita como $x^2 + xy + 3xy + y^2 + y^2 + 7$ y simplificada agrupando términos semejantes para obtener $x^2 + 4xy + 2y^2 + 7$.

Ejemplo 6

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 4x + 3 + -x^2 + 3x - 7 \\ &= 3x^2 - x^2 - 4x + 3x + 3 - 7 \\ &= 2x^2 - x - 4 \end{aligned}$$

Problemas

Halla el área y el perímetro de cada figura.



Simplifica las siguientes expresiones agrupando términos semejantes.

10. $2x^2 + x + 3 + 4x^2 + 3x + 5$

11. $y^2 + 2y + x^2 + 3y^2 + x^2$

12. $x^2 - 3x + 2 + x^2 + 4x - 7$

13. $y^2 + 2y - 3 - 4y^2 - 2y + 3$

14. $4xy + 3x + 2y - 7 + 6xy + 2x + 7$

15. $x^2 - y^2 + 2x + 3y + x^2 + y^2 + 3y$

16. $(4x^2 + 4x - 1) + (x^2 - x + 7)$

17. $(y^2 + 3xy + x^2) + (2y^2 + 4xy - x^2)$

18. $(7x^2 - 6x - 9) - (9x^2 + 3x - 4)$

19. $(3x^2 - 8x - 4) - (5x^2 + x + 1)$

Respuestas

1. $P = 4x + 4$
 $A = x^2 + 2x$

2. $P = 4y + 6$
 $A = y^2 + 3$

3. $P = 4x + 8$
 $A = 4x + 4$

4. $P = 4y + 4$
 $A = y^2 + 2y + 1$

5. $P = 4y + 4$
 $A = x^2 + 2y$

6. $P = 2x + 2y + 6$
 $A = 2x + 2y + 2$

7. $P = 8x + 6$
 $A = 4x^2 + 6x + 2$

8. $P = 6x$
 $A = x^2 + x + 1$

9. $P = 6x + 4y$
 $A = 2x^2 + xy + y^2$

10. $6x^2 + 4x + 8$

11. $4y^2 + 2y + 2x^2$

12. $2x^2 + x - 5$

13. $-3y^2$

14. $10xy + 5x + 2y$

15. $2x^2 + 2x + 6y$

16. $5x^2 + 3x + 6$

17. $3y^2 + 7xy$

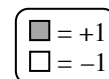
18. $-2x^2 - 9x - 5$

19. $-2x^2 - 9x - 5$

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

A.1.3 – A.1.5

Un Tablero de expresiones es una representación física de una expresión algebraica. La mitad superior de un Tablero de expresiones es la región positiva (suma) y la mitad inferior es la región negativa (resta). Los azulejos positivos son sombreados y los azulejos negativos son blancos (la ilustración a la derecha recuerda que los azulejos sombreados son positivos). Un par de azulejos iguales de los cuales uno es blanco y el otro sombreado representa dos opuestos, con un valor de cero. Haremos referencia a ellos como “par de opuestos”.



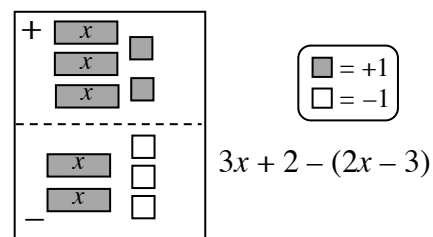
En un Tablero de expresiones, los azulejos pueden ser eliminados o movidos en una de dos formas “legales”:

- (1) Girar los azulejos y moverlos de la región negativa a la positiva. Es decir, cambiar la resta por la suma de un opuesto.
- (2) Eliminar la misma cantidad de azulejos opuestos (uno sombreado y uno blanco) en una misma región. Estos pares de azulejos opuestos tienen un valor de cero.
- (3) Agrupar azulejos que son semejantes. Es decir, agrupar términos semejantes.

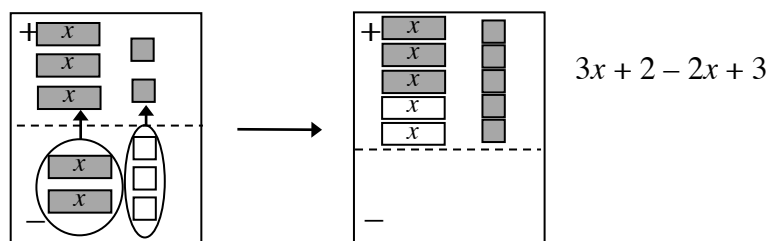
Para más información, consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección A.1.6.

Ejemplo 1

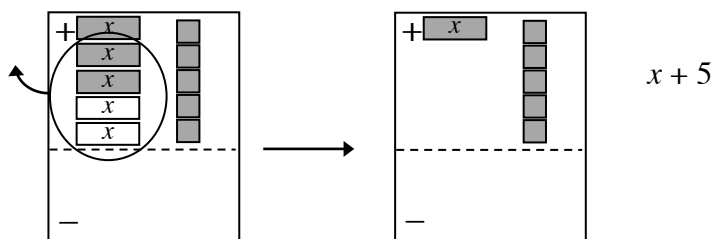
Simplifica $3x + 2 - (2x - 3)$. Crea un Tablero de expresiones:



Gira azulejos en la región de resta y pásalos a la región de suma:



Elimina los pares de opuestos:

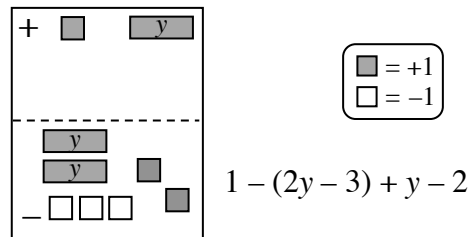


Por lo tanto, puedes simplificar $3x + 2 - (2x - 3)$ a $x + 5$.

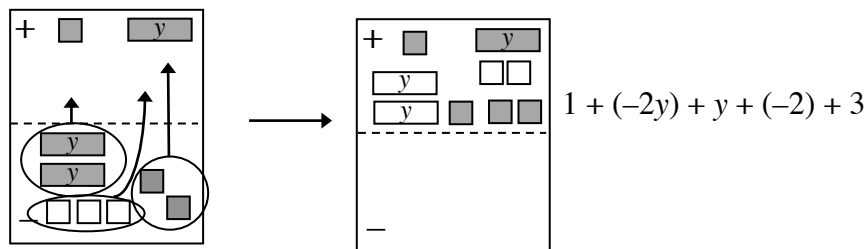
Ejemplo 2

Simplifica $1 - (2y - 3) + y - 2$.

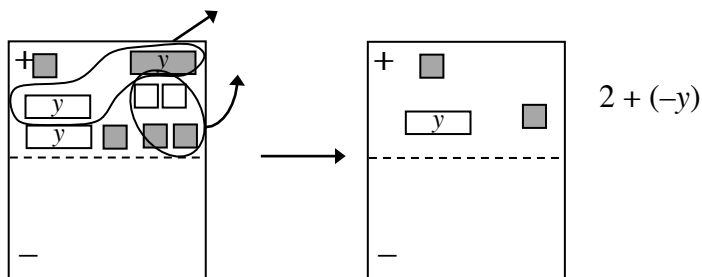
Crea un Tablero de expresiones:



Gira azulejos en la región de resta y pásalos a la región de suma:



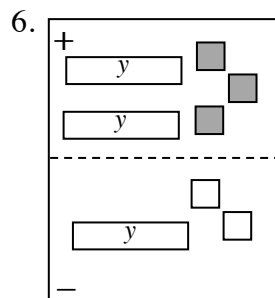
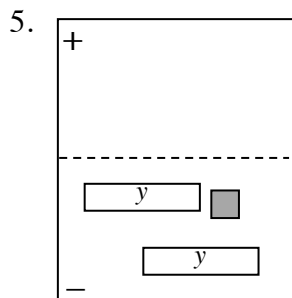
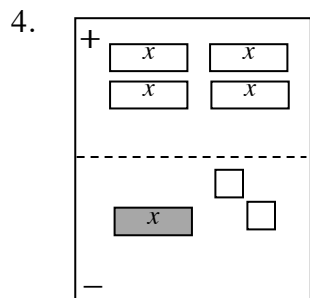
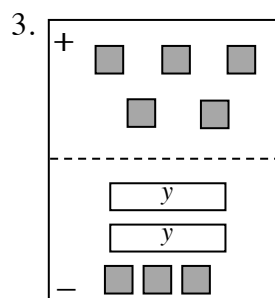
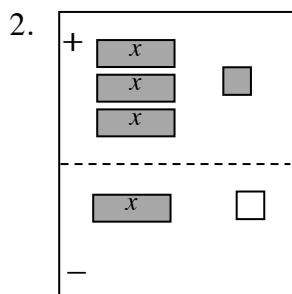
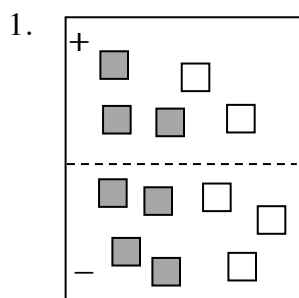
Elimina los pares de opuestos:



Por lo tanto, puedes simplificar $1 - (2y - 3) + y - 2$ a $2 + (-y)$ o $2 - y$.

Problemas

Escribe la expresión algebraica correspondiente y simplifica.



Usa azulejos algebraicos para simplificar las siguientes expresiones.

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 7. $3 + 5x - 4 - 7x$ | 8. $-x - 4x - 7$ | 9. $-(-x + 3)$ |
| 10. $4x - (x + 2)$ | 11. $5x - (-3x + 2)$ | 12. $x - 5 - (2 - x)$ |
| 13. $1 - 2y - 2y$ | 14. $-3x + 5 + 5x - 1$ | 15. $3 - (y + 5)$ |
| 16. $-(x + y) + 4x + 2y$ | 17. $3x - 7 - (3x - 7)$ | 18. $-(x + 2y + 3) - 3x + y$ |

Respuestas

- | | | |
|------------------------------------|---|---|
| 1. $3 + (-2) - 4 - (-3)$
$= 0$ | 2. $3x + 1 - x - (-1)$
$= 2x + 2$ | 3. $5 - (-2y) - (3)$ o
$5 - (-2y + 3)$
$= 2y + 2$ |
| 4. $-4x - x - (-2)$
$= -5x + 2$ | 5. $-(-2y) - 1$ o
$-(-2y + 1)$
$= 2y - 1$ | 6. $3 + (-2y) - (-y) - (-2)$
$= -y + 5$ |
| 7. $-2x - 1$ | 8. $-5x - 7$ | 9. $x - 3$ |
| 10. $3x - 2$ | 11. $8x - 2$ | 12. $2x - 7$ |
| 13. $-4y + 1$ | 14. $2x + 4$ | 15. $-y - 2$ |
| 16. $3x + y$ | 17. 0 | 18. $-4x - y - 3$ |

Las expresiones representadas por dos Tableros de expresiones contiguos pueden compararse para determinar cuál es mayor.

Para comparar dos expresiones, represéntalas con azulejos en dos Tableros de expresiones individuales. Trabaja con cada Tablero de expresiones en forma independiente para simplificar la expresión moviendo o eliminando azulejos mediante el uso de movimientos “legales”:

- Gira azulejos y muévelos de la región negativa a la positiva. Es decir, cambia la resta por la suma de opuestos.
- Elimina la misma cantidad de azulejos opuestos (uno sombreado y uno blanco) en una misma región. Es decir, elimina los pares de opuestos.
- Coloca o elimina los mismos azulejos en *ambos* Tableros de expresiones. Es decir, suma o resta el mismo valor de ambos lados.
- Agrupa azulejos que sean semejantes y se encuentren dentro de una misma región. Es decir, agrupa términos semejantes.

Continúa realizando movimientos “legales” en cualquier orden hasta que ya no puedas simplificar más las expresiones. Compara la expresión de la izquierda con la de la derecha para determinar cuál es mayor. Si aún hay azulejos con variables después de simplificar, no tienes suficiente información para saber qué lado es mayor—cualquiera de los dos Tableros de expresiones podría ser mayor que el otro dependiendo de qué número represente el azulejo con la variable.

También se les pide a los alumnos que registren sus pasos. Cada maestro tendrá distintas expectativas, pero a continuación se incluyen dos formas posibles para registrar los pasos. También es posible hacer los pasos en otro orden.

Registro de pasos en forma simbólica:

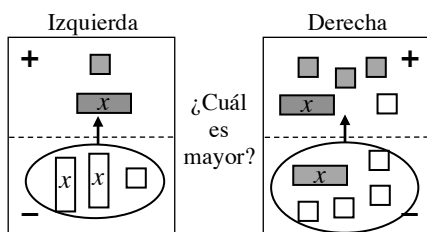
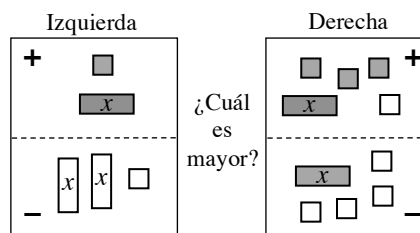
Expresión izquierda		Expresión derecha
$ \begin{array}{c} \text{mover} \\ \curvearrowright \\ -2x + 1 - 3 - (-x + 3) \\ = \\ -2x + 1 - 3 + x - 3 \\ \text{---} \\ -x - 5 \\ \text{---} \\ -(-x) \\ \hline -5 \end{array} $	$ \begin{array}{c} ? \\ = \\ ? \\ = \\ ? \\ = \\ ? \\ = \end{array} $	$ \begin{array}{c} \text{mover} \\ \curvearrowright \\ 2 - 3 - (x - 2) \\ \text{---} \\ 2 - 3 - x + 2 \\ \text{---} \\ 1 - x \\ \text{---} \\ -(-x) \\ \hline 1 \end{array} $

Registro de pasos con una explicación escrita.

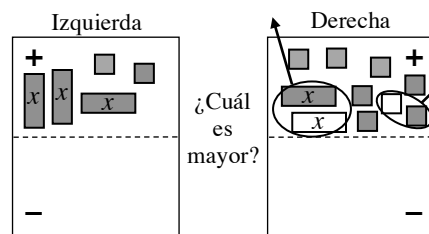
Expresión izquierda	Expresión derecha	Explicación
$-2x + 1 - 3 - (-x + 3)$	$2 - 3 - (x - 2)$	Expresiones iniciales
$-2x + 1 - 3 + x - 3$	$2 - 3 - (x - 2)$	Mover $-x + 3$ de “-” a “+”
$-x - 5$	$2 - 3 - (x - 2)$	Agrupar términos semejantes
$-x - 5$	$2 - 3 - x + 2$	Mover $x - 2$ de “-” a “+”
-5	$2 - 3 + 2$	Eliminar $-x$ de ambos lados
-5	1	Agrupar términos semejantes

Ejemplo 2

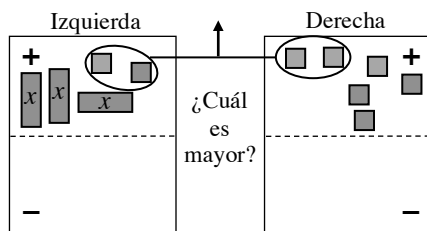
Crea las expresiones $x + 1 - (-1 - 2x)$ y $3 + x - 1 - (x - 4)$ y usa movimientos legales para simplificar y determinar qué lado es mayor.



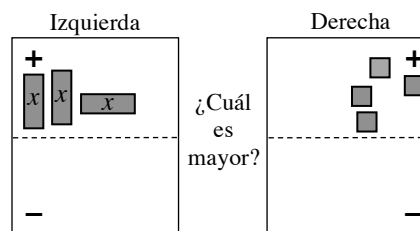
(1) Gira azulejos y muévelos de la región negativa a la región positiva.



(2) Elimina la misma cantidad de azulejos opuestos de una misma región.



(3) Elimina los azulejos iguales de *ambos* Tableros de expresiones.

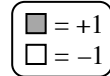


(4) Compara los Tableros de expresiones.

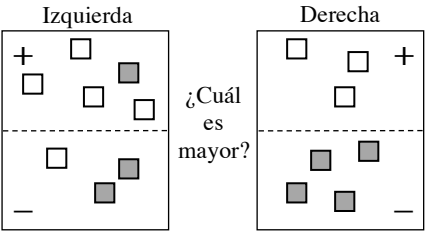
$$3x \quad ? \quad 4$$

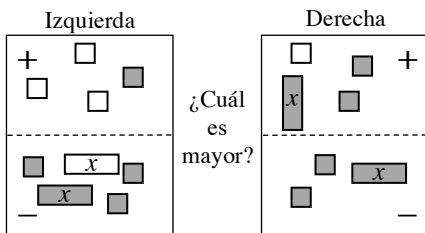
Ya que no sabemos el valor de x , no es posible determinar qué lado es mayor.

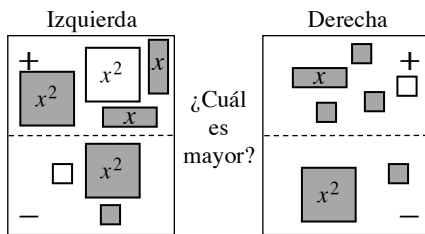
Problemas

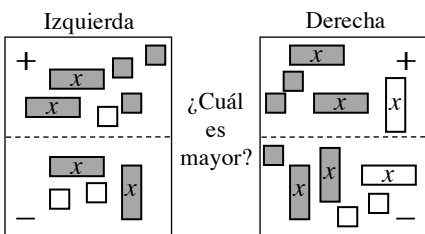


Escribe una expresión para cada lado de los Tableros de comparación de expresiones. Usa movimientos legales para simplificar y determinar qué lado es mayor. Registra cuidadosamente tus pasos a medida que avanzas.

1. 

2. 

3. 

4. 

En los problemas 5 a 10, registra tus pasos a medida que usas movimientos legales para simplificar cada expresión y determinar qué lado tiene un valor mayor.

5. ¿Cuál es mayor: $6 - (2x - 4) - 3$ o $-x - (1 + x) + 4$?
6. ¿Cuál es mayor: $3x - (2 - x) + 1$ o $-5 + 4x + 3$?
7. ¿Cuál es mayor: $-1 + 6x - 2 + 4y - 2x$ o $y + 5x - (-2 + x) + 3y - 2$?
8. ¿Cuál es mayor: $x^2 - 2x + 6 - (-3x)$ o $-(3 - x^2) + 5 + 2x$?
9. ¿Cuál es mayor: $x + 2 - (2 - 2x)$ o $4 + x - 2 - (x - 4)$?
10. ¿Cuál es mayor: $2x + 4 - x - (-2) + x^2$ o $3 + x^2 + 4x - (-3 + 3x)$?

Respuestas (las expresiones y explicaciones pueden variar)

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. el lado izquierdo es mayor | 2. el lado derecho es mayor |
| 3. no hay suficiente información | 4. el lado izquierdo es mayor |
| 5. el lado izquierdo es mayor | 6. el lado izquierdo es mayor |
| 7. el lado derecho es mayor | 8. no hay suficiente información |
| 9. no hay suficiente información | 10. ambos lados son iguales |

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES**A.1.8 y A.1.9**

Un Tablero de ecuaciones puede utilizarse para representar el proceso de resolución de una ecuación. Un Tablero de ecuaciones se crea colocando dos Tableros de expresiones lado a lado: uno de cada lado del signo de igual.

Consulta los recuadros de Apuntes de matemáticas de las Lecciones A.1.8 y 3.2.1 para ver una lista de todos los movimientos “legales” y su correspondiente lenguaje algebraico. Consulta también el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección A.1.9 para saber cómo verificar una solución.

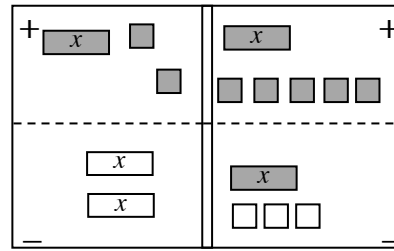
Cuando el proceso de resolución de una ecuación termina con dos números distintos a cada lado del signo de igual (por ejemplo, $2 = 4$), es porque el problema *no tiene ninguna solución que sea un número real*. Cuando el resultado es la misma expresión o número de ambos lados de la ecuación (por ejemplo, $x + 2 = x + 2$) es porque la solución son *todos los números reales*.

Para más ejemplos y ejercicios de práctica, consulta el material del Punto de comprobación 1.

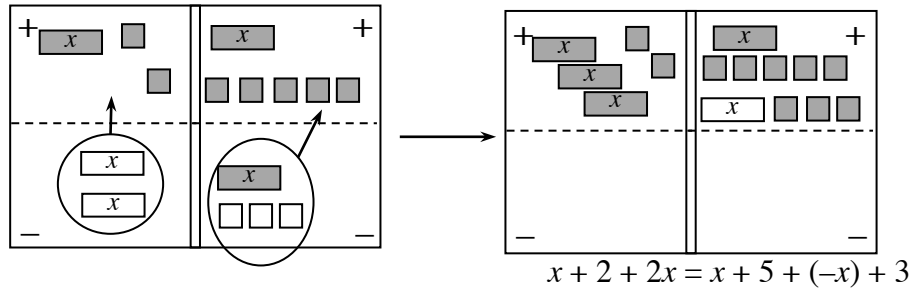
Ejemplo 1

Resuelve $x + 2 - (-2x) = x + 5 - (x - 3)$.

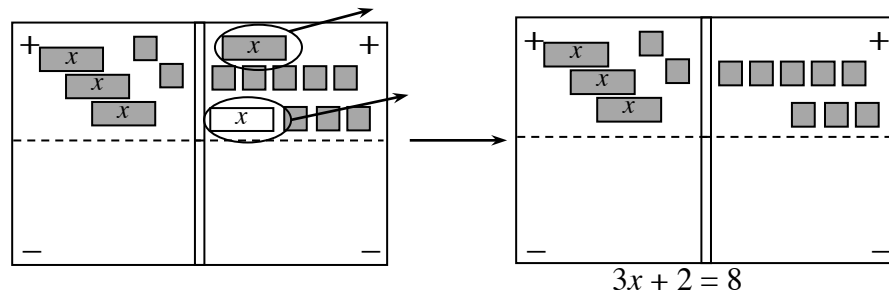
Primero construye la ecuación en un Tablero de ecuaciones. Consulta el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección A.1.8.



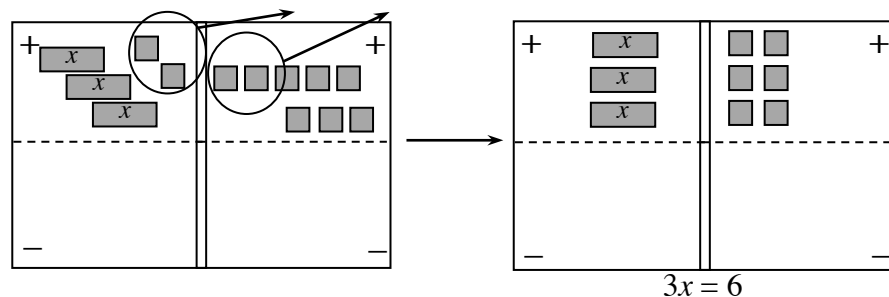
Luego, mueve los azulejos de la región de resta a la de suma (cambia restas por la suma de opuestos).



Continúa simplificando usando los movimientos “legales” detallados en el recuadro de Apuntes de matemáticas de la Lección 3.2.1 en cualquier orden. Por ejemplo, elimina pares de opuestos.



Aísla los términos x de un lado y los términos que no tengan x del otro moviendo o eliminando azulejos iguales de ambos lados del Tablero de ecuaciones. Elimina pares de opuestos nuevamente de ser necesario.



Finalmente, crea grupos de azulejos del mismo tamaño a ambos lados. Ya que ambos lados de la ecuación son iguales, determina el valor de x . En este caso, los azulejos pueden ser colocados en tres grupos para obtener como resultado $x = 2$.

Ejemplo 2

Resuelve $3x + 3x - 1 = 4x + 9$

$$3x + 3x + (-1) = 4x + 9$$

Mueve todos los azulejos de la región de resta a la de suma.

$$6x + (-1) = 4x + 9$$

Agrupar términos semejantes.

$$6x = 4x + 10$$

Suma 1 a cada lado y elimina pares de opuestos.

$$2x = 10$$

Elimina $4x$ de ambos lados.

$$x = 5$$

Coloca los valores en dos grupos.

Ejemplo 3

Resuelve $-2x + 1 - (-3x + 3) = -4 + (-x - 2)$

$$-2x + 1 + 3x + (-3) = -4 + (-x) + (-2)$$

Mueve todos los azulejos de la región de resta a la de suma.

$$x + (-2) = -x + (-6)$$

Agrupar términos semejantes.

$$x = -x + (-4)$$

Suma 2 a cada lado y elimina pares de opuestos.

$$2x = -4$$

Suma x a ambos lados y elimina pares de opuestos.

$$x = -2$$

Coloca los valores en dos grupos.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones.

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $2x - 3 = -x + 3$ | 2. $1 + 3x - x = x - 4 + 2x$ |
| 3. $4 - 3x = 2x - 6$ | 4. $3 + 3x - (x - 2) = 3x + 4$ |
| 5. $-(x + 3) = 2x - 6$ | 6. $-4 + 3x - 1 = 2x + 1 + 2x$ |
| 7. $-x + 3 = 10$ | 8. $5x - 3 + 2x = x + 7 + 6x$ |
| 9. $4y - 8 - 2y = 4$ | 10. $9 - (1 - 3y) = 4 + y - (3 - y)$ |
| 11. $2x - 7 = -x - 1$ | 12. $-2 - 3x = x - 2 - 4x$ |
| 13. $-3x + 7 = x - 1$ | 14. $1 + 2x - 4 = -3 - (-x)$ |
| 15. $2x - 1 - 1 = x - 3 - (-5 + x)$ | 16. $-4x - 3 = x - 1 - 5x$ |
| 17. $10 = x + 6 + 2x$ | 18. $-(x - 2) = x - 5 - 3x$ |
| 19. $6 - x - 3 = 4x - 8$ | 20. $0.5x - (-x + 3) = x - 5$ |

Respuestas

- | | | | | |
|------------------|------------------------|-----------------|------------------------|--------------|
| 1. $x = 2$ | 2. $x = 5$ | 3. $x = 2$ | 4. $x = 1$ | 5. $x = 1$ |
| 6. $x = -6$ | 7. $x = -7$ | 8. sin solución | 9. $y = 6$ | 10. $y = -7$ |
| 11. $x = 2$ | 12. todos los números | 13. $x = 2$ | 14. $x = 0$ | 15. $x = 2$ |
| 16. sin solución | 17. $x = 1\frac{1}{3}$ | 18. $x = -7$ | 19. $x = 2\frac{1}{5}$ | 20. $x = -4$ |