

Transformaciones rígidas

APOYO GUIADO DE COMPETENCIAS

Resumen

Estudiar la transformación de las formas geométricas establece una base para una idea clave en geometría: la congruencia. En esta introducción a las transformaciones, el alumnado explorará tres movimientos rígidos: traslaciones, reflexiones y rotaciones. La traslación desliza una figura en sentido horizontal, vertical o ambos. La reflexión voltea una figura del otro lado de una recta fija (por ejemplo, el eje x). Una rotación hace girar un objeto respecto de un punto (por ejemplo, $(0, 0)$).

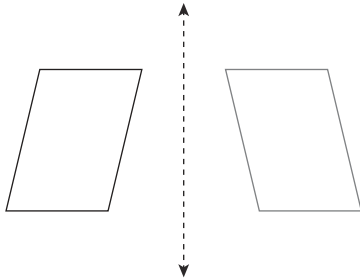
Esta exploración se hace con herramientas simples que pueden encontrarse en casa (papel de calcar) o en un programa informático. El alumnado cambia la posición o la orientación de una forma aplicando uno o más de estos movimientos a la figura original para crear su imagen en una nueva posición sin cambiar su tamaño ni su forma. Las transformaciones también sirven para estudiar la simetría de las formas. Estas ideas ayudarán a describir y clasificar formas geométricas más adelante en este curso.

Puedes encontrar más información en el recuadro de Métodos y significados de la Lección 6.1.3 del *Curso 3 de Core Connections en español*.

Ejemplos

1. Decide qué transformación se usó con cada par de formas. Algunas pueden ser una combinación de transformaciones.

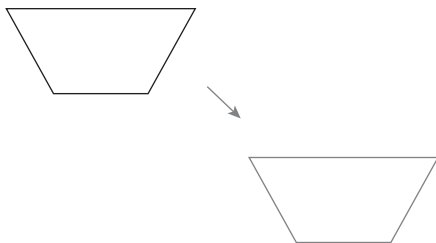
a.



El paralelogramo está reflejado (volteado) sobre una recta vertical invisible. Imagina un espejo en sentido vertical y a la misma distancia entre las dos figuras. Una figura será la reflexión de la otra.

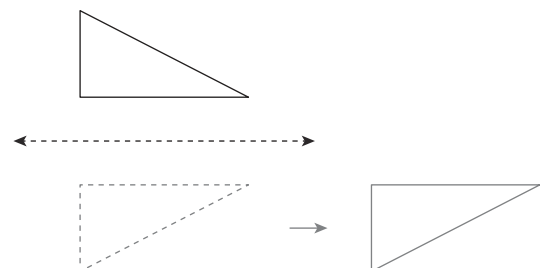
Reflejar una forma una vez cambia su orientación, es decir, las diferentes direcciones a las que apuntan sus partes en la superficie plana. Los dos lados de la figura de la izquierda están inclinados hacia arriba y a la derecha, mientras que, en la reflexión, están inclinados hacia arriba y a la izquierda. Del mismo modo, los ángulos de la figura de la izquierda “intercambian las posiciones” en la figura de la derecha.

b.



La forma se trasladó (o deslizó) hacia la derecha y abajo. La orientación es la misma.

c.

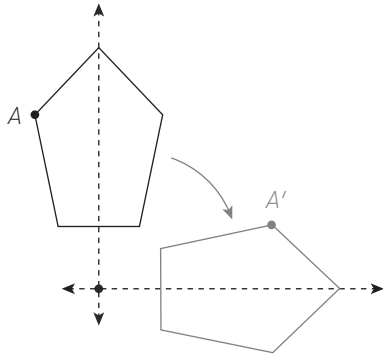


Esta es una combinación de transformaciones. Primero, el triángulo se reflejó (volteó) sobre una recta horizontal invisible. Luego, se trasladó (deslizó) hacia la derecha.

El ejemplo continúa en la página siguiente.

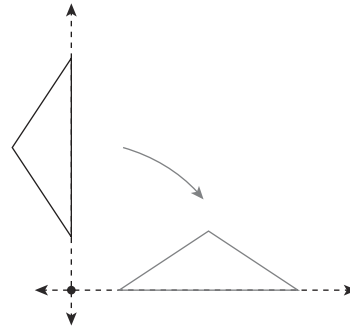
El ejemplo continúa de la página anterior.

d.



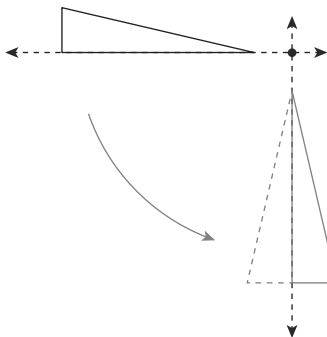
El pentágono se ha rotado (girado) en el sentido de las agujas del reloj para crear la segunda figura. Imagina que calcas la primera figura en papel, luego sostienes el papel con un alfiler en un punto debajo del primer pentágono y después giras el papel 90° en el sentido de las agujas del reloj. El segundo pentágono sería el resultado. Algunas personas pueden considerar que esto es una reflexión sobre una recta diagonal. El pentágono en sí podría ser una, pero dada la marca del punto A, no es posible que la forma entera sea una reflexión. Si hubiese sido el resultado de una reflexión, el punto A debería estar en la esquina debajo de la que se muestra en la figura rotada.

e.



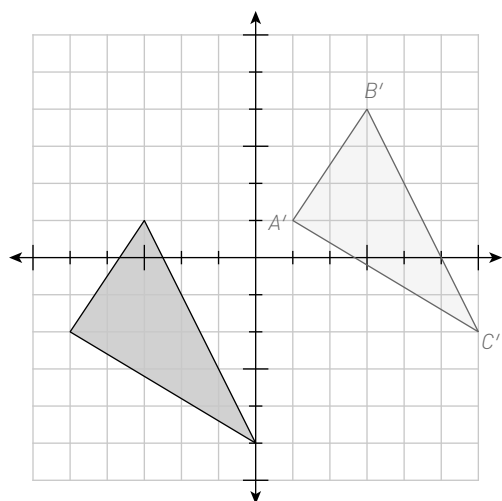
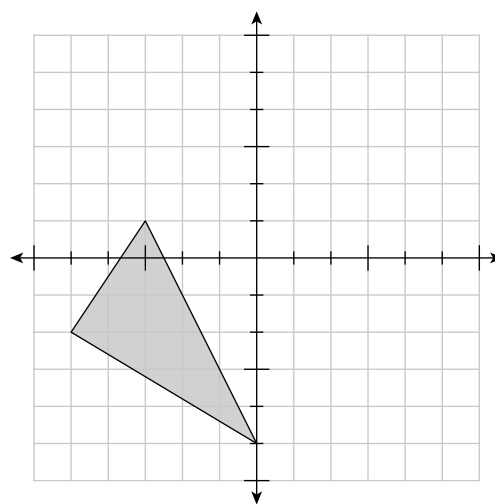
El triángulo con el lado vertical se ha rotado 90° en el sentido de las agujas del reloj, y esto dio lugar al triángulo con el lado horizontal.

f.



El triángulo se ha rotado (el lado horizontal queda vertical), pero también se ha reflejado, ya que la orientación es diferente de la primera figura.

2. Traslada (desplaza) $\triangle ABC$ seis unidades hacia la derecha y tres unidades hacia arriba. Proporciona las coordenadas de los vértices del nuevo triángulo.

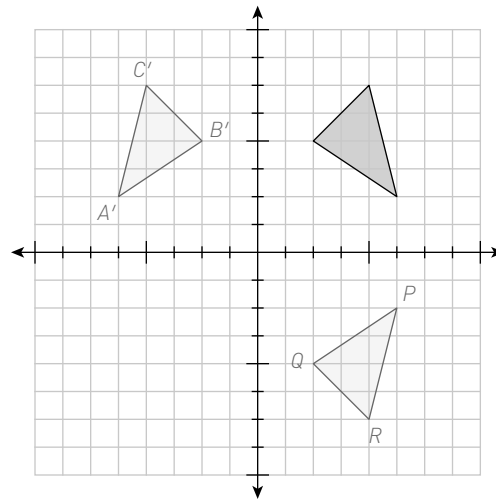


Los vértices originales son $A(-5, -2)$, $B(-3, 1)$ y $C(0, -5)$. Los nuevos vértices son $A'(1, 1)$, $B'(3, 4)$ y $C'(6, -2)$. Observa que el cambio de cada punto original (x, y) puede representarse con $(x + 6, y + 3)$.

3. Refleja (voltea) $\triangle ABC$ con las coordenadas $A(5, 2)$, $B(2, 4)$, y $C(4, 6)$ sobre el eje y para obtener $\triangle A'B'C'$. Luego, refleja $\triangle ABC$ sobre el eje x .

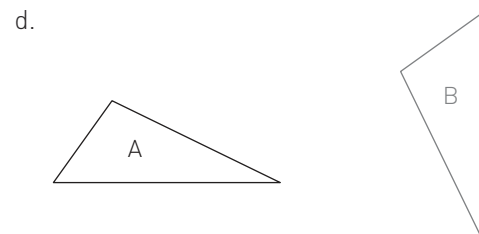
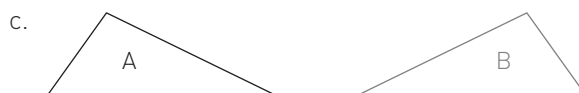
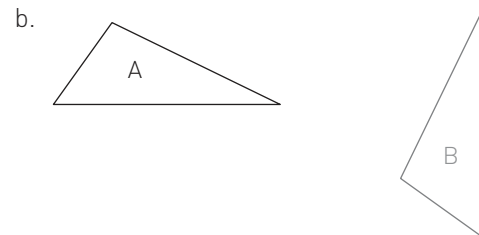
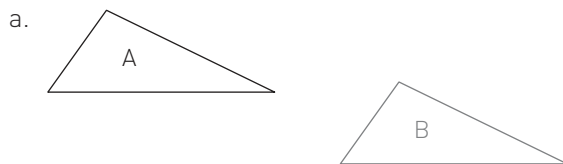
Una reflexión siempre está a la misma distancia de la recta de reflexión que la figura original. Los nuevos puntos después de reflejar $\triangle ABC$ son $A'(-5, 2)$, $B'(-2, 4)$ y $C'(-4, 6)$. Observa que, cuando reflejas sobre el eje y , el cambio en cada punto original (x, y) puede representarse con $(-x, y)$.

Si reflejas $\triangle ABC$ sobre el eje x para obtener $\triangle PQR$, los nuevos puntos son $P(5, -2)$, $Q(2, -4)$ y $R(4, -6)$. En este caso, cuando reflejas sobre el eje x , el cambio a cada punto original (x, y) puede representarse con $(x, -y)$.

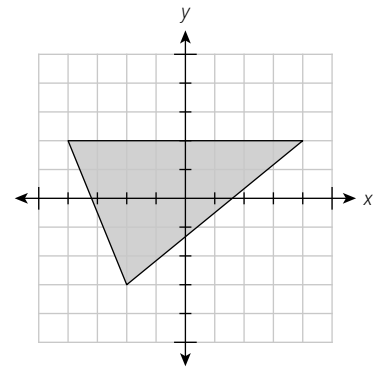
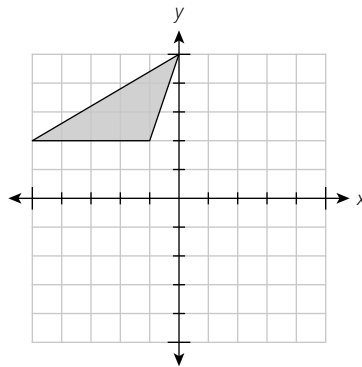
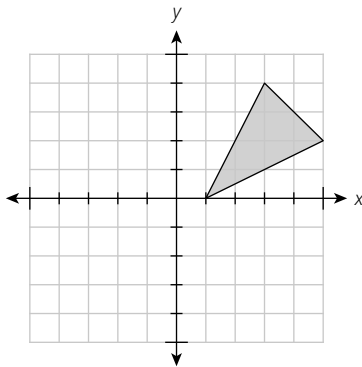


Práctica

1. Para cada par de triángulos, describe la transformación o serie de transformaciones que desplazan el triángulo A al lugar del triángulo B.



2. Para las partes (a) a (p), indica las nuevas coordenadas después de cada transformación. Usa las figuras que se muestran como referencia:



- Desliza la forma A 2 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia abajo.
- Desliza la forma B 3 unidades hacia la derecha y 5 unidades hacia abajo.
- Desliza la forma C 1 unidad hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba.
- Voltea la forma A sobre el eje x .
- Voltea la forma B sobre el eje x .
- Voltea la forma C sobre el eje x .
- Voltea la forma A sobre el eje y .
- Voltea la forma B sobre el eje y .
- Voltea la forma C sobre el eje y .
- Rota la forma A 90° en el sentido inverso a las agujas del reloj respecto del origen.
- Rota la forma B 90° en el sentido inverso a las agujas del reloj respecto del origen.
- Rota la forma C 90° en el sentido inverso a las agujas del reloj respecto del origen.
- Rota la forma A 180° en el sentido inverso a las agujas del reloj respecto del origen.
- Rota la forma C 180° en el sentido inverso a las agujas del reloj respecto del origen.
- Rota la forma B 270° en el sentido inverso a las agujas del reloj respecto del origen.
- Rota la forma C 90° en el sentido de las agujas del reloj respecto del origen.

Respuestas

1. Las respuestas pueden variar.
 - a. traslación
 - b. rotación y traslación
 - c. reflexión
 - d. rotación y reflexión
2. Las coordenadas se dan en el orden X' , Y' , Z' .
 - a. $(-1, -3), (1, 1), (3, -1)$
 - b. $(-2, -3), (2, -3), (3, 0)$
 - c. $(-5, 4), (3, 4), (-3, -1)$
 - d. $(1, 0), (3, -4), (5, -2)$
 - e. $(-5, -2), (-1, -2), (0, -5)$
 - f. $(-4, -2), (4, -2), (-2, 3)$
 - g. $(-1, 0), (-3, 4), (-5, 2)$
 - h. $(5, 2), (1, 2), (0, 5)$
 - i. $(4, 2), (-4, 2), (2, -3)$
 - j. $(0, 1), (-4, 3), (-2, 5)$
 - k. $(-2, -5), (-2, -1), (-5, 0)$
 - l. $(-2, -4), (-2, 4), (3, -2)$
 - m. $(-1, 0), (-3, -4), (-5, -2)$
 - n. $(4, -2), (-4, -2), (2, 3)$
 - o. $(2, 5), (2, 1), (5, 0)$
 - p. $(-2, 4), (2, -4), (-3, 2)$

Figuras semejantes

APOYO GUIADO DE COMPETENCIAS

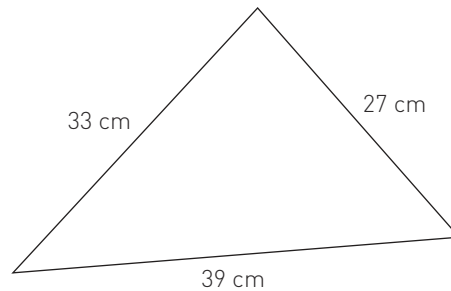
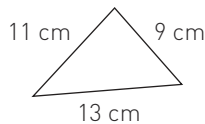
Resumen

Dos figuras que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, son semejantes. En las figuras semejantes, las medidas de los ángulos correspondientes son iguales y las razones de los lados correspondientes son proporcionales. Esta razón se llama factor de escala.

Puedes encontrar información sobre lados y ángulos correspondientes de figuras semejantes en el recuadro de Métodos y significados de la Lección 6.2.6 del *Curso 3 de Core Connections en español*. Puedes encontrar información sobre los factores de escala y la semejanza en el recuadro de Métodos y significados de la Lección 6.2.4 del *Curso 3 de Core Connections en español*.

Ejemplos

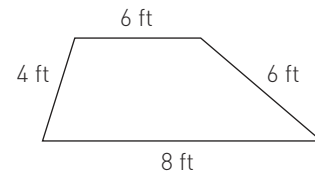
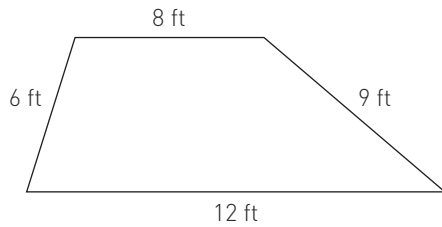
1. Determina si las figuras son semejantes. Si es así, ¿cuál es el factor de escala?



$$\frac{39}{13} = \frac{33}{11} = \frac{27}{9} = \frac{3}{1} \text{ o } 3$$

Las razones de los lados correspondientes son iguales, por lo que las figuras son semejantes. El factor de escala para agrandar la figura pequeña y obtener la grande es 3. El factor de escala que reduce la figura grande para obtener la pequeña es $\frac{1}{3}$.

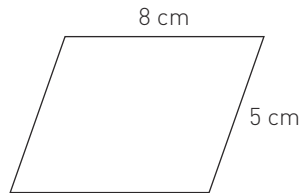
2. ¿Son semejantes las figuras? Si es así, determina el factor de escala.



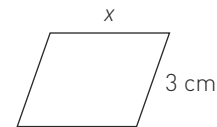
$$\frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{9}{6} \text{ y todos equivalen a } \frac{3}{2}.$$

$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$; por lo tanto, las formas no son semejantes.

3. ¿Cuál es el factor de escala del par de figuras semejantes? Usa el factor de escala para calcular la longitud del lado marcado con una variable.



ORIGINAL



NUEVO

$$\text{factor de escala} = \frac{3}{5}$$

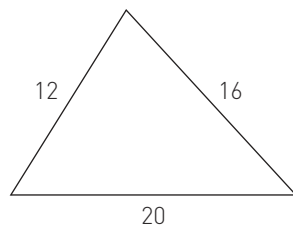
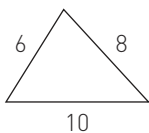
$$\text{original} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow \text{nueva}$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot \frac{3}{5} &= x \\ x &= \frac{24}{5} \\ x &= 4.8 \text{ cm} \end{aligned}$$

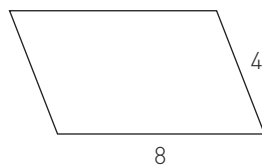
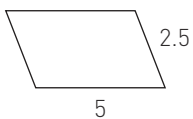
Práctica

Determina si las figuras son semejantes. Si lo son, indica el factor de escala de la primera respecto de la segunda.

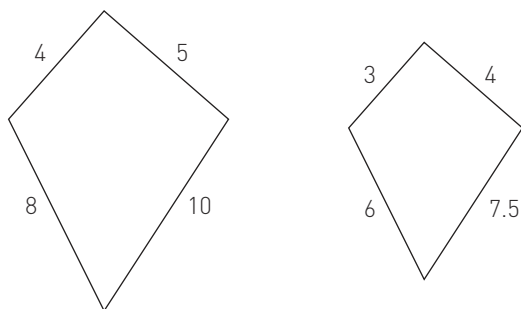
- 1.



- 2.

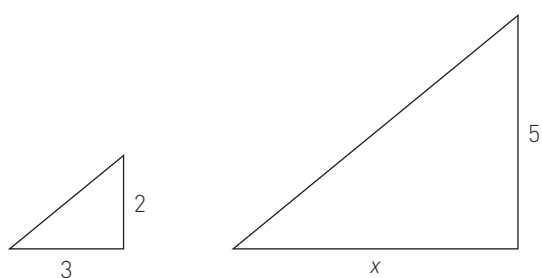


3.

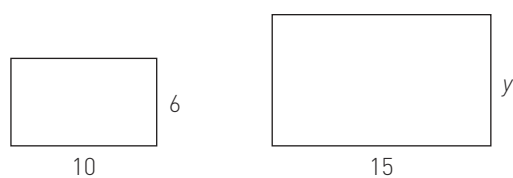


¿Cuál es el factor de escala de cada par de figuras semejantes? Usa el factor de escala para calcular la longitud del lado marcado con una variable.

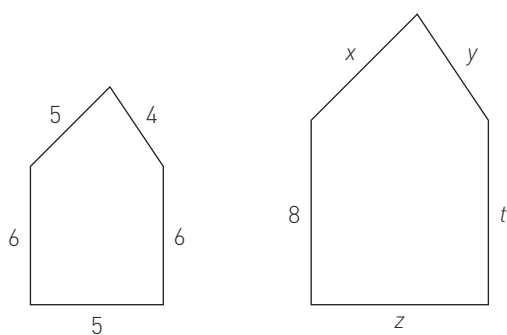
4.



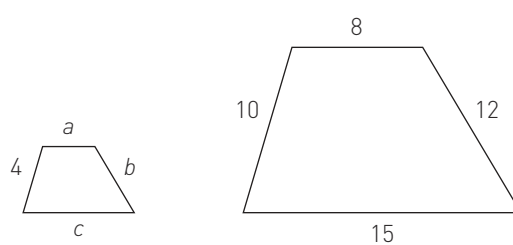
5.



6.



7.



Respuestas

1. semejantes; 2
2. semejantes; $\frac{8}{5} = 1.6$
3. no semejantes
4. $\frac{5}{2}; x = 7.5$
5. $\frac{3}{2}; y = 9$
6. $\frac{4}{3}; x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}, y = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}; t = 8, z = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$
7. $\frac{5}{2}; a = \frac{16}{5} = 3.2, b = \frac{24}{5} = 4.8, c = 6$

Usando escalas para resolver problemas

APOYO GUIADO DE COMPETENCIAS

Resumen

El alumnado usó factores de escala (multiplicadores) para agrandar y reducir figuras, y también para incrementar o disminuir cantidades. Todas las cantidades o las longitudes originales se multiplicaron por el factor de escala para obtener nuevas cantidades o longitudes. Para revertir este proceso y volver de la escala nueva a la original, dividimos por el factor de escala. Dividir por un factor de escala es lo mismo que multiplicar por el recíproco. Este mismo concepto es útil para resolver ecuaciones con coeficientes fraccionarios.

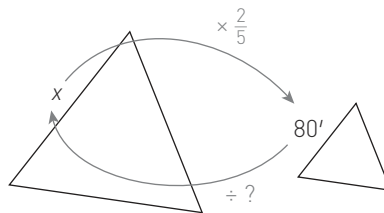
Para eliminar un coeficiente fraccionario, puedes dividir cada término de la ecuación por el coeficiente o multiplicar cada término por el recíproco del coeficiente. Recuerda que un recíproco es el inverso multiplicativo de un número, es decir, el producto de los dos números es 1.

Por ejemplo, el recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$. El recíproco de $\frac{1}{2}$ es $\frac{2}{1}$. El recíproco de 5 es $\frac{1}{5}$.

Las escalas también pueden usarse con problemas de porcentaje en los que una cantidad se incrementa o se reduce en determinado porcentaje. Usar un factor de escala de 1 no modifica la cantidad. Se puede incrementar por un determinado porcentaje convirtiendo el porcentaje en un decimal y después multiplicándolo por (1 + el decimal), mientras que se puede reducir por cierto porcentaje convirtiendo el porcentaje en un decimal y después multiplicándolo por (1 – el decimal).

Ejemplos

- El triángulo grande que se muestra se redujo por un factor de escala de $\frac{2}{5}$ para crear un triángulo semejante. Si el lado marcado con x ahora tiene una longitud de 80' en la nueva figura, ¿cuál era la longitud original?



Para deshacer la reducción, multiplica 80' por el recíproco de $\frac{2}{5}$, que es $\frac{5}{2}$, o divide 80' por $\frac{2}{5}$.

$80 \div \frac{2}{5}$ es lo mismo que $80 \cdot \frac{5}{2}$, entonces $x = 200'$.

2. Resuelve: $\frac{3}{4}x = 27$

MÉTODO 1

Usa la división y el método de los denominadores comunes.

$$\frac{3}{4}x = 27$$

$$\frac{\frac{3}{4}x}{\frac{3}{4}} = \frac{27}{\frac{3}{4}}$$

$$x = \frac{27}{\frac{3}{4}}$$

$$x = 27 \div \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{108}{4} \div \frac{3}{4}$$

$$x = 108 \div 3$$

$$x = 36$$

MÉTODO 2

Usa recíprocos.

$$\frac{3}{4}x = 27$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x\right) = (27)\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$x = \frac{108}{3}$$

$$x = 36$$

3. Samantha quiere dejar una propina del 15 % de su cuenta del almuerzo de \$12.50. ¿Qué factor de escala debería usar y cuánto dinero debería dejar?

Dado que la propina aumenta el total, el factor de escala es $(1 + 15\%) = 1.15$. Ella debería dejar $(1.15)(12.50) = \$14.38$ o aproximadamente \$14.50.

4. Carlos ve que todos los DVD están en oferta con un 40 % de descuento. Si el precio normal de un DVD es \$24.95, ¿cuál es el factor de escala y cuál es el precio de oferta?

Si el precio de los artículos se reduce en un 40 %, el factor de escala es $(1 - 40\%) = 0.60$. El precio de oferta es $(0.60)(24.95) = \$14.97$.

Práctica

- Se agranda un rectángulo por un factor de escala de $\frac{5}{2}$ y el nuevo ancho es de 40 cm. ¿Cuál era el ancho original?
- La longitud de un lado de un triángulo se redujo por un factor de escala de $\frac{2}{3}$. Si el nuevo lado ahora tiene 18 pulgadas, ¿cuál era el lado original?
- El factor de escala usado para crear el diseño de un jardín trasero es de 2 pulgadas por cada 75 pies ($\frac{2}{75}$). Si, en el diseño, el brasero está a 0.5 pulgadas de la casa, ¿a qué distancia de la casa, en pies, deberá cavarse el brasero?
- Después de un año muy exitoso, Cheap Rentals subió los salarios por un factor de escala de $\frac{11}{10}$. Si Luan ahora gana \$14.30 por hora, ¿cuánto ganaba antes?
- Resuelve: $\frac{3}{4}x = 60$
- Resuelve: $\frac{2}{5}x = 42$
- Resuelve: $\frac{3}{5}y = 40$
- Resuelve: $-\frac{3}{4}m = 6$
- ¿Cuál es el costo total de una cena familiar de \$39.50 después de sumar una propina del 20 %?
- Si ir al Parque Magicland ahora cuesta \$29.50 por persona adulta, ¿cuál será el costo después de un incremento del 8 %?
- Los abrigos de invierno tienen un descuento del 60 %. Si el precio normal es de \$79, ¿cuál es el precio de oferta?
- La presidente de la compañía ofreció reducir su salario en un 10 % para reducir gastos. Si ahora gana \$175,000, ¿cuál será su nuevo salario?

Respuestas

- | | | | |
|------------|----------------|-------------------------|---------------|
| 1. 16 cm | 2. 27 pulgadas | 3. $18\frac{3}{4}$ pies | 4. \$13.00 |
| 5. 80 | 6. 105 | 7. $66\frac{2}{3}$ | 8. -8 |
| 9. \$47.40 | 10. \$31.86 | 11. \$31.60 | 12. \$157,500 |